# DIE STURMSCHE KETTE

Hintergrund: Die Nullstellen eines Polynoms wie etwa $x^5 - x - 1$ können nicht geschlossen dargestellt werden. Frage: Wie viele reelle Nullstellen besitzt es, wie viele davon sind positiv?

Für die gesamte Vorlesung ist $f$ ein reelles Polynom.

1. **Definition.** Eine endliche Folge $p_0, p_1, \ldots, p_n$ reeller Polynome ist eine *Sturmsche Kette,* wenn folgendes gilt

(a) $p_0 = f$, $p_1 = f'$,
(b) für jedes $t \in \mathbb{R}$, für das $p_k(t) = 0$, sind $p_{k-1}(t)$ und $p_{k+1}(t)$ beide nicht $0$ und haben verschiedene Vorzeichen
(c) $p_n$ hat keine reelle Nullstelle

2. **Satz.** *Jedes Polynom, das mit seiner Ableitung keine gemeinsame Nullstelle besitzt, besitzt eine Sturmsche Kette.*

*Beweis.* Wenn $p$ oder $p'$ keine reelle Nullstelle haben, wurde eine triviale Sturmsche Kette gefunden.

Wir nehmen nun an, dass für ein $k \geq 2$ Polynome $p_0, p_1, \ldots, p_k$ mit den Eigenschaften (a) und (b) bestimmt worden sind. Wir teilen $p_{k-1}$ mit Rest durch $p_k$ und nenne den Rest $-p_{k+1}$, also

$$p_{k-1} = qp_k - p_{k+1}.$$

Der Rest ist nicht Null, denn dann wäre $p_k$ ein Teiler von $p_{k-1}$, also auch von $p_{k-2}$. Induktiv sieht man, dass $p_k$ ein Teiler von $p$ und von $p'$ ist. Da $p_k$ eine Nullstelle $w$ besitzt, weil wir sonst die Sturmsche Kette mit $p_k$ beendet hätten, besitzen auch $f$ und $f'$ diese Nullstelle.

Wenn $p_k(t) = 0$, dann nach Voraussetzung $p_{k-1}(t) \neq 0$ und daher $p_{k+1}(t) = -p_{k-1}(t)$ wie verlangt.

Wenn $p_{k+1}$ keine reelle Nullstelle besitzt, hören wir auf.

Das Verfahren endet, weil $p_{k+1}$ einen echt kleineren Grad als $p_k$ besitzt. □

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $S(x)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x))$. Die Null hat dabei kein Vorzeichen.

Beispiel: Die Folge $(2, 0, -1)$ hat einen Vorzeichenwechsel.

3. **Satz.** *Die Anzahl der Nullstellen von $f$ im offenen Intervall $(a, b)$ ist gleich $S(a) - S(b)$.*

4. *Beispiel.* $f(x) = x^2 - 1$. Dann $p_0(x) = x^2 - 1$, $p_1(x) = 2 * x$, $p_3(x) = 1$. Die Tabelle zeigt die Vorzeichenverteilung

| Intervall | Vorzeichen | $S(x)$ |
|---|---|---|
| $x < -1$ | $(+-+)$ | 2 |
| $x = -1$ | $(0-+)$ | 1 |
| $-1 < x < 0$ | $(--+)$ | 1 |
| $x = 0$ | $(-0+)$ | 1 |
| $0 < x < 1$ | $(-++)$ | 1 |
| $x = 1$ | $(0++)$ | 0 |
| $x > 1$ | $(+++)$ | 0 |

*Beweis.* [Beweis des Satzes] Wir betrachten die ersten beiden Einträge der Vorzeichenfolge, wenn $x$ eine Nullstelle $x_0$ von $f$ durchläuft.

1. Fall: $f'(x_0) < 0$. Für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ haben wir die Vorzeichenfolge $(+-\dots)$, für $x = x_0$ haben wir $(0-\dots)$ und für $x \in (x_0, x+\epsilon)$ haben wir $(--\dots)$.

2. Fall: $f'(x_0) > 0$. Dann $(-+\dots) \to (0+\dots) \to (++\dots)$.

In beiden Fällen hat die Anzahl der Vorzeichenwechsel um eins abgenommen.

Wenn ein $p_k$ mit $k \geq 1$ eine Nullstelle aufweist, sind die Einträge $k-1$, $k$, $k+1$ der Vorzeichenfolge entweder gleich $(+0-)$ oder gleich $(-0+)$. Wir betrachten den ersten Fall. Dann haben wir links von der Nullstelle entweder $(++-)$ oder $(+--)$ und rechts von der Nullstelle ebenso eine dieser beiden Möglichkeiten. Insgesamt bleibt die Anzahl der Vorzeichenwechsel unverändert. □

5. *Beispiel.* $f(x) = x^5 - x + a$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$. Dann $p1(x) = f'(x) = 5x^4 - 1$, $p_2 = \frac{4}{5}x - a$, $p_3(x) = \frac{5^5}{4^4}a^4 - 1$. Nehme an, dass $a > \frac{4}{\sqrt[5]{5}}$. Dann ist für sehr weit im Negativen liegende $x$ die Vorzeichenfolge gleich $(-+-+)$, für sehr weit im Positiven liegende $x$ dagegen $(++++)$. Daher $S(-\infty) = 3$, $S(\infty) = 0$. Es gibt also drei Nullstellen. Für $x = 0$ ist die Vorzeichenfolge gleich $(+--+)$, also $S(0) = 2$. Zwei Nullstellen sind positiv. Die anderen Fälle können genauso leicht behandelt werden.