Übungsblatt 9

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 12.12.2017, Abgabe: Di., 19.12.2017

B **Aufgabe 1:** (Inneres und Rand, $2+2$ Punkte)
Sei $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\mathring{M} = \bigcup \{\, U \subseteq \mathbb{R} \,:\, U \subseteq M \text{ und } U \text{ ist offen} \,\}$ und $\mathring{M}$ ist offen.

b) ∂M ist abgeschlossen und $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$

B **Aufgabe 2:** (Inneres, Abschluss und Rand, $2+2$ Punkte)
Bestimmen für die folgenden Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ jeweils $\mathring{M}$, $\overline{M}$ und ∂M, wobei

a) $M = [-1,\, 1] \setminus N$ mit $N = \{\, 0 \,\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\, -\frac{1}{n},\, +\frac{1}{n} \,\}$;

b) $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(\frac{1}{(n+1)^2},\, \frac{1}{n+1}\big)$.

Entscheiden Sie jeweils weiterhin, ob M offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt ist.

B **Aufgabe 3:** (Stetigkeit, $2+2$ Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die Funktion $x \mapsto |x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2\alpha x, & \text{falls } x \geq 1, \\ x^2 + \alpha^2, & \text{falls } x < 1, \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

stetig ist.

B **Aufgabe 4:** (Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, $2+2+2$ Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : (-1,\, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass f auf jeder kompakten Teilmenge $A \subseteq (-1,\, 1)$ gleichmäßig stetig ist; geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, so dass

$$\forall x,\, y \in A : \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 5: (Stetigkeit)
Zeigen Sie (mit Hilfe des Folgenkriteriums), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{\, 0 \,\}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z} \setminus \{\, 0 \,\},\ q \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

HINWEIS: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß.