Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

SS 2006
7. April 2006
Blatt 1

Übungen zu Analysis II

1. Ist V ein normierter Raum und sind $v, w \in V$, so gilt
$$\big|\,||v|| - ||w||\,\big| \leq ||v - w||.$$

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.
   (a) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, so definiere $d' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $d'(x, y) := \alpha d(x, y)$. Zeigen Sie, dass d' eine Metrik auf X ist und dass die metrischen Räume (X, d) und (X, d') dieselben offenen Mengen besitzen.
   (b) Wir definieren $d'' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch
   $$d''(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$
   Zeigen Sie, dass d'' eine Metrik auf X ist und dass (X, d) und (X, d'') dieselben offenen Mengen besitzen.
   Für alle $x, y \in X$ ist $d''(x, y) < 1$.

3. Eine Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V heißt *konvex*, wenn gilt: Sind $x, y \in A$, so enthält A auch die Verbindungsstrecke $\{\lambda y + (1 - \lambda)x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ von x und y.
   (a) Ist V ein normierter Raum, $a \in V$ und $r > 0$, so sind die Mengen $B_r(a)$ und $\bar{B}_r(a)$ konvex.
   (b) Ist $0 < p < 1$ und definiert man
   $$\|v\|_p := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$
   für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist $\| \,.\, \|_p$ **keine** Norm auf $\mathbb{R}^n$, falls $n \geq 2$.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine nicht-leere Teilmenge. Man definiert den *Durchmesser* $\delta(A) \in [0, \infty]$ durch
   $$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$
   (a) Sei $a \in X$ und $r > 0$. Was kann man über den Durchmesser der Kugeln $B_r(a)$ und $\overline{B}_r(a)$ sagen?
   (b) Die Teilmenge A von X heißt *beschränkt*, wenn $\delta(A) < \infty$. Zeigen Sie: Sind A und B beschränkte Teilmengen von X, so ist $A \cup B$ beschränkt.
   (c) Zeigen Sie: Eine Teilmenge A eines normierten Raumes V ist genau dann beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $||v|| \leq M$ für alle $v \in A$.

Abgabe: Dienstag, den 18. April 2006, 11.15 Uhr