Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
9. Juni 2006
Blatt 10

Übungen zu Analysis II

38. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, sei J ein offenes Intervall und seien $g, h\colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Definieren Sie $f\colon J \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := -g(x)y - h(x)y^\alpha. \tag{1}$$

und betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, also

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0. \tag{2}$$

Sie heißt **Bernoullische Differentialgleichung**.

(a) Zeigen Sie: Ist I ein offenes Intervall in J und $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\psi'(x) + (1-\alpha)g(x)\psi(x) + (1-\alpha)h(x) = 0 \tag{3}$$

und $\psi(x) > 0 \ \forall x \in I$ und ist

$$\varphi(x) := (\psi(x))^{1/(1-\alpha)},$$

so ist φ eine Lösung von (2).

Ist umgekehrt φ eine Lösung von (2), so erhält man durch $\psi := \varphi^{1-\alpha}$ eine Funktion mit (3).

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y} - y.$$

(c) Ist $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 1$, so wird durch (1) eine Funktion $f\colon J \times]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ definiert. In diesem Fall kann man mit einer zu (a) ähnlichen Vorgehensweise auch die negativen Lösungen von (2) finden.

Bestimmen Sie die Lösungen von

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

Bitte wenden!

39. Sei J ein offenes Intervall und seien $g, h, k\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \tag{4}$$

eine **Riccatische Differentialgleichung**.

(a) Sind $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen von (4), so ist $\psi - \varphi$ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' + (g(x) + 2\varphi(x)h(x))y + h(x)y^2 = 0. \tag{5}$$

(b) Ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4), so ist jede andere, auf einem Teilintervall von I definierte Lösung ψ von (4) von der Form

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{\chi(x)},$$

wobei χ eine Lösung folgender linearer Differentialgleichung ist:

$$y' - [g(x) + 2\varphi(x)h(x)]y - h(x) = 0. \tag{6}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Riccatische Differentialgleichung

$$y' + y^2 + (xy - 1)G(x) = 0$$

für jede stetige Funktion G die Lösung $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ hat. Wie lautet die zugehörige lineare Differentialgleichung (6)?

(d) Drücken Sie alle Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' - y^2 - xy - x + 1 = 0.$$

mithilfe der Funktion

$$E(x) := \int_0^x e^{t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

aus.

Abgabe: Freitag, den 16. Juni 2006, 11.15 Uhr