Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
16. Juni 2006
Blatt 11

Übungen zu Analysis II

40. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie A^k für $k \in \mathbb{N}$ und e^A.

41. Führen Sie den Beweis der als Satz 2 von §12 formulierten Variante des Fixpunktsatzes von Banach im Detail aus, d.h. zeigen Sie: Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $x_0 \in X$, $R > 0$ und $B := \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$. Sei $G: B \to X$ eine Abbildung. Es gebe ein $C < 1$, so dass

(1) $d(G(x), G(y)) \leq C d(x, y) \; \forall x, y \in B$.

(2) $d(G(x_0), x_0) < R(1 - C)$.

Dann gibt es genau ein $x \in B$ mit $G(x) = x$.

42. Wir definieren $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := x^2 + xy^2$ und betrachten die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Wir definieren induktiv Funktionen $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \geq 0$ durch $\varphi_0(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ und

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f(t, \varphi_{n-1}(t)) \, \mathrm{d}t \text{ für } n \geq 1.$$

(a) Berechnen Sie explizit die Funktionen φ_1, φ_2, φ_3.

(b) Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist φ_n ein Polynom vom Grad $5 \cdot 2^{n-1} - 2$.

(c) Geben Sie explizit ein Intervall an, auf dem die Folge (φ_n) gleichmäßig gegen eine Lösung der Differentialgleichung konvergiert.

43. (a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit $\begin{array}{ll} f(x,y) < 0, & \text{falls} \quad xy > 0, \\ f(x,y) > 0, & \text{falls} \quad xy < 0. \end{array}$

Sei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und sei $\varphi: I \to \mathbb{R}$ Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Tipp: Widerspruchsbeweis; betrachte Extrema und Wachstumsverhalten von φ.

Bitte wenden!

(b) Sei $f(x,y) := \begin{cases} -2x & \text{für} \quad y \geq x^2, \\ -2\frac{y}{x} & \text{für} \quad |y| < x^2, \\ 2x & \text{für} \quad y \leq -x^2. \end{cases}$

Dann erfüllt f die Voraussetzungen von (a). Definiert man die Funktionen φ_n durch $\varphi_0(x) := x^2$ und $\varphi_n(x) := \displaystyle\int_0^x f(t, \varphi_{n-1}(t))\, \mathrm{d}t$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert für $x \neq 0$ die Folge $(\varphi_n(x))$ nicht.

Abgabe: Freitag, den 23. Juni 2006, 11.15 Uhr