Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
23. Juni 2006
Blatt 12

Übungen zu Analysis II

44. Sei K ein kompaktes Intervall und $g : K \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sei $C(K; \mathbb{R}^n)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{R}^n$. Für $f \in C(K; \mathbb{R}^n)$ sei wie in § 14 der Vorlesung:

$$||f||_g := \max_{x \in K} ||g(x)f(x)||.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $||.||_g$ eine Norm auf $C(K; \mathbb{R}^n)$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $C(K; \mathbb{R}^n)$ mit dieser Norm ein Banach-Raum ist.

45. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $g : X \to X$ eine Abbildung. Es gelte: Sind x, y zwei verschiedene Punkte von X, so ist $||g(x) - g(y)|| < ||x - y||$. Zeigen Sie, dass genau ein $x_0 \in X$ existiert mit $g(x_0) = x_0$.

46. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -xy - 2x.$$

Sei $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Zeigen Sie:

   (a) Die Funktion

$$\{t \in \mathbb{R} | -t \in I\} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (-x(-t), y(-b))$$

   ist ebenfalls eine Lösung.

   (b) Wenn es ein $t_0 \in I$ gibt mit $y(t_0) > -2$, so ist $y(t) > -2$ für alle $t \in I$.

   (c) Ist $t \in I$ mit $x(t) > 0$, so ist

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2) \leq 0.$$

   (d) Nun sei $0 \in I, x(0) = 0, y(0) > 0$ und das Intervall I sei maximal. Dann ist $I = \mathbb{R}$ und (x, y) ist periodisch.

   (e) Gibt es hingegen ein $t_0 \in I$ mit $y(t_0) < -2$, so ist (x, y) nicht periodisch.

Abgabe: Dienstag, den 4. Juli 2006, 11.15 Uhr