Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
21. April 2006
Blatt 3

Übungen zu Analysis II

8. Seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume und $X := X_1 \times \ldots \times X_n$. Definiere Abbildungen $d, d', d'' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &:= \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}, \\ d'(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &:= d_1(x_1, y_1) + \ldots + d_n(x_n, y_n), \\ d''(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &:= \Big(d_1(x_1, y_1)^2 + \ldots + d_n(x_n, y_n)^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

für $x_i, y_i \in X_i$.

   (a) Zeigen Sie: d, d', d'' sind Metriken auf X. Für alle $x, y \in X$ ist
   $$d(x, y) \leq d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd(x, y).$$
   Die drei Metriken definieren dieselben offenen Mengen.

   (b) Ist A_i offen in X_i für $i = 1, \ldots, n$, so ist $A_1 \times \ldots \times A_n$ offen in X.

   (c) Definiere $\mathrm{pr}_i \colon X \longrightarrow X_i$ durch $\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i$. Zeigen Sie, dass pr_i stetig ist.

   (d) Ist A offen in X, so ist $\mathrm{pr}_i(A)$ offen in X_i.

   (e) Ist Y ein weiterer metrischer Raum und $f \colon Y \longrightarrow X$ eine Abbildung, so ist $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$ mit eindeutig bestimmten Abbildungen $f_i \colon Y \longrightarrow X_i$.
   Zeigen Sie: Genau dann ist f stetig, wenn alle f_i stetig sind.

9. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie in Aufgabe 8 machen wir $X \times X$ zu einem metrischen Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

   (b) Sei V ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von V in $\mathbb{R}$ stetig ist.

10. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $\emptyset \neq A \subseteq X$ und $x \in X$, so sei $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Zeigen Sie:

   (a) $d(x, A) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \bar{A}$.

   (b) Sind $x, y \in X$, so ist $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

   (c) Die Abbildung $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(x) := d(x, A)$ definiert ist, ist stetig.

   (d) Sind A, B abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X, so gibt es offene Teilmengen U und V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Abgabe: Freitag, den 28. April 2006, 11.15 Uhr