Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
5. Mai 2006
Blatt 5

Übungen zu Analysis II

15. (a) Finden Sie alle partiell differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^4 + x^3 y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + y^2 + 1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Warum gibt es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2 mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^4 + x^3 y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 + y^2 + 1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?
Folgeren Sie, dass es überhaupt keine partiell differenzierbare Funktion mit dieser Eigenschaft gibt.

16. Ist U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2, so definiert man $\Delta f\colon U \to \mathbb{R}$ durch

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} D_i^2 f(x).$$

Δ heißt der *Laplace-Operator* auf U, und die Funktion f heißt *harmonisch*, wenn $\Delta f = 0$.

(a) Sei $F\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und sei $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := F(r(x)),$$

wobei $r(x) := \|x\|_2$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta f(x) = F''(r(x)) + \frac{n-1}{r(x)} F'(r(x)).$$

(b) Finden Sie für jedes n eine nicht-konstante Funktion $F\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, so dass die in (a) definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

17. Sei k eine natürliche Zahl. Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \operatorname{Re}\left((x+iy)^k\right).$$

Zeigen Sie, dass f eine harmonische Funktion ist.

18. Ist U eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und $\mathcal{H}(U)$ die Menge der harmonischen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{H}(U)$ ein unendlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

Abgabe: Freitag, den 12. Mai 2006, 11.15 Uhr