Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2006
12. Mai
Blatt 6

Übungen zu Analysis II

19. Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x + y + 1.$$
    (a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen und die lokalen Extrema von f.
    (b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf der Menge
$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|(x,y)\|_\infty \le 1\}.$$

20. Bestimmen Sie drei positive Zahlen x, y, z, deren Summe gleich 60 ist und deren Produkt maximal ist.

21. Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := -(y - x^2)(y - 2x^2)$.
    (a) Zeigen Sie, dass f die folgenden Eigenschaften hat:
        (1) $(0,0)$ ist die einzige kritische Stelle von f.
        (2) Für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ besitzt die Funktion $t \mapsto f(tv)$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ein striktes lokales Maximum in 0.
        (3) f besitzt kein lokales Maximum in $(0,0)$.
    (b) Definiere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$g(x,y) := \arctan(\exp(f(x,y) - 1)).$$
    Zeigen Sie, dass auch g die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat.
    (Der Maple-Plot von g ist eindrucksvoller als der von f.)

22. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Sei $x_0 \in U$ eine kritische Stelle von f und es sei $\langle Hf(x_0) \cdot \xi, \xi \rangle \ge 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Außerdem sei $Hf(x_0)$ nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass f in x_0 kein lokales Maximum besitzt.

23. Definiere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := (1 + \|x\|_2^2)^{-1}$. Für $a \in \mathbb{R}^2$ sei $f_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_a(x) := f(x - a)$.
    (a) Welche kritischen Stellen und lokalen Extrema hat die Funktion f?
    (b) Sind $a, b \in \mathbb{R}^2$, so hat $f_a + f_b$ kein lokales Minimum.
    (c) Es gibt endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$, so dass $f_{a_1} + \ldots + f_{a_n}$ ein lokales Minimum hat.

Abgabe: Freitag, den 19. Mai, 11.15 Uhr