Übungsblatt 4

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 01.05.2018, Abgabe: Di., 08.05.2018

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Normen auf $C([a,\,b])$, $2+2+2$ Punkte)
Sei $a < b$. Die Abbildungen $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_\infty : C([a,\,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ seien gegeben als

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_\infty := \max_{a\le x\le b} |f(x)|, \qquad f \in C([a,\,b]).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ für $p \in \{\,1,\,\infty\,\}$ eine Norm auf $C([a,\,b])$ definiert, d. h. dass gilt

(i) Für alle $f \in C([a,\,b])$ ist $\|f\|_p \ge 0$ und $\|f\|_p = 0$ genau für $f \equiv 0$;

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $f \in C([a,\,b])$ ist $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$;

(iii) Für alle $f,\,g \in C([a,\,b])$ ist $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

B **Aufgabe 2:** (Normen und Konvergenz in $C([0,\,1])$, $2+2+2$ Punkte)
Seien $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_\infty : C([0,\,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\|f\|_1 \le C\|f\|_\infty$ für alle $f \in C([0,\,1])$.

b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,\,1])$, die gegeben ist als

$$f_k(x) := x^k, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad k \in \mathbb{N},$$

und zeigen Sie, dass $\|f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$.

c) Zeigen Sie, dass es *keine* Konstante $C' > 0$ gibt, so dass $\|f\|_\infty \le C'\|f\|_1$ für alle $f \in C([0,\,1])$.

B **Aufgabe 3:** (Stetigkeit, $2+2+2$ Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $f,\,g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind als

$$f(x) := \sin(x_1) + e^{x_2^2}, \qquad g(x) = x_1^2 + \cos(x_2), \qquad x = (x_1,\,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildungen $\pi_j : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind als $\pi_j(x) := x_j$, sind stetig für $j = 1,\,2$.

b) Die Funktionen f und g sind stetig.

c) Die Menge $A := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sin(x_1) + e^{x_2^2} = 1,\ x_1^2 + \cos(x_2) \le 2\,\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Ist A auch kompakt?

Hinweis: Für Teil c) beachten Sie Aufgabe 4 von Blatt 3.

Aufgabe 4: (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit)
Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.24 (b), d. h.

$$g(x,\,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,\,y) \ne (0,\,0), \\ 0, & (x,\,y) = (0,\,0), \end{cases} \qquad (x,\,y) \in \mathbb{R}^2,$$

die nach Präsenzaufgabe 3 b) unstetig in $(0,\,0)$ ist, und zeigen Sie, dass g partiell differenzierbar in $(0,\,0)$ ist.

Präsenzaufgaben zu Blatt 4

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 02./03.05.2018

Aufgabe 1: (Normen auf $\mathbb{R}^n$)
Für $1 \le p \le \infty$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty), \qquad \|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x_k|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass so für jedes $1 \le p \le \infty$ eine *Norm* auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist, d. h. dass gilt

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_p \ge 0$ und $\|x\|_p = 0$ genau für $x = 0$;

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\alpha x\|_p = |\alpha|\,\|x\|_p$;

(iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Hinweis: $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$. Bei (iii) sollten zunächst die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ betrachtet werden. Für die übrigen Fälle ist die Hölder'sche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n,\ 1 < p, q < \infty,\ \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1,$$

nützlich.

Aufgabe 2: (Normen und Konvergenz in $\mathbb{R}^n$)

a) Zeigen Sie, dass alle in Aufg. 1 definierten Normen äquivalent sind, d. h. dass für alle $1 \le p, q \le \infty$ ein $c_{p,q} > 0$ existiert mit

$$c_{p,q}^{-1}\|x\|_q \le \|x\|_p \le c_{p,q}\|x\|_q, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Sei $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn $\|a_k - a\|_p \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

Hinweis: In Teil a) kann man o. E. $q = \infty$ annehmen.

Aufgabe 3: (Verkettung stetiger Funktionen)

a) Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig ist.

b) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f_\alpha(x) := (x, \alpha x)$ für $x \in \mathbb{R}$ sowie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.24 (b), d. h.

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig ist und folgern Sie mit Hilfe von Teil a), dass g nicht stetig ist.