Übungsblatt 8

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 29.05.2018, Abgabe: Di., 05.06.2018

B **Aufgabe 1:** (Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen, $1+1+1+1+1+1$ Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $x'' = t^2 + x^3$ b) $(x' + x^2)^3 = 1$ c) $x_1' = x_2$ und $x_2' = -x_1$

d) $x = x''$ e) $\exp(x') + \sin(x) = 1$ f) $\cos(t)x' + \exp(t)x'' + \sin(t)x = \cosh(t)$

Klassifizieren Sie: Ist die Gleichung linear oder nicht linear, autonom oder nicht autonom, explizit oder implizit?

B **Aufgabe 2:** (Richtungsfelder, $2+2+2+2$ Punkte)
Skizzieren Sie die Richtungsfelder der folgenden Differentialgleichungen und zeichnen Sie jeweils die Lösung zu einer von Ihnen gewählten Anfangswertvorgabe ein:

a) $y'(t) = y(t)/t^2$ b) $y'(t) = t + y(t)^3$ c) $y'(t) = \sin(t)$ d) $y'(t) = \cos(y(t)^2)$

Hinweis: Diese Aufgabe darf auch mit Maple oder Matlab bearbeitet werden. In diesem Fall reicht es aus, den Ausdruck eines geeigneten Plots abzugeben.

B **Aufgabe 3:** (Transformation gewöhnlicher Differentialgleichungen, $2+2$ Punkte)
Transformieren Sie die folgenden Differentialgleichungen jeweils auf ein System erster Ordnung:

a) $x'''(t) + \cos(t)x'(t) = 0$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$, $x''(1) = 0$.

b) $x_1''(t) = \cos(x_2(t))x_1(t)$, $x_2''(t) = \exp(t(x_1(t) - x_2(t)))$, $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_2'(0) = 1$.

Aufgabe 4: (Lipschitz-Stetigkeit)
Zeigen Sie, dass folgende Funktionen nicht lokal Lipschitz-stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(y) = \sqrt{|y|}$ für $y \in \mathbb{R}$;

b) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(y) = y \log(y)$ für $y > 0$ und $f(0) = 0$.

Präsenzaufgaben zu Blatt 8

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 30./31.05.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Die Differentialgleichung $(x'(t) - x''(t))^2 = 1$ ist nicht linear und autonom.

b) Die Differentialgleichung $\exp(t)x'(t) = \sin(t)x(t)$ ist autonom und explizit.

c) Jede stetige Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

Aufgabe 2: (Lipschitz-Stetigkeit)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x - y)^2$ lokal aber nicht global Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 3: (Richtungsfelder)
Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ und zeichnen Sie verschiedene Lösungen zu von Ihnen gewählten Anfangswertvorgaben ein.

Aufgabe 4: (Transformation gewöhnlicher Differentialgleichungen)
Transformieren Sie die folgenden Differentialgleichungen jeweils auf ein System erster Ordnung:

a) $x'''(t) = \ln(1 + t)x''(t)^2 + \sinh(2t)x(t)$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$, $x''(1) = 0$.

b) $y''(t) = 3z(t) - y'(t)$, $z''(t) = 2y'(t) + z'(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $z(0) = 1$, $z'(0) = 1$.