Übungsblatt 9

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 05.06.2018, Abgabe: Di., 12.06.2018

B **Aufgabe 1:** (Picard-Lindelöf – globale Version, $3 + 3$ Punkte)
Seien $T > 0$ und $J = [0, T]$ sowie $\alpha, \beta \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf (globale Version) die eindeutige Lösbarkeit folgender Anfangswertprobleme:

a) $y'(t) = (1 + t^2 + y(t)^2)^{-1}$ für $t \in J$, $y(0) = \alpha$.

b) $y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t)$ und $y_2'(t) = -y_2(t) + 2y_1(t)$ für $t \in J$, $y_1(0) = \alpha$, $y_2(0) = \beta$.

B **Aufgabe 2:** (Picard-Lindelöf – lokale Version, $2 + 2 + 2 + 2$ Punkte)
Finden Sie unter Benutzung des Satzes von Picard-Lindelöf (lokale Version) jeweils alle Punkte $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, durch welche genau eine Lösungskurve folgender Differentialgleichungen verläuft:

a) $y'(t) = 2ty(t) + y(t)^2$;

b) $y'(t) = 1 + \tan(y(t))$;

c) $(y(t) - t)y'(t) = \ln(t)y(t)$;

d) $ty'(t) = y(t) + \sqrt{y(t)^2 - t^2}$.

B **Aufgabe 3:** (Explizite Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, $2 + 2 + 2 + 2$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine Lösung durch einen beliebigen Punkt (t_0, y_0) des Definitionsbereichs der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'(t) = e^{y(t)} \cos(t)$;

b) $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)^2}$;

c) $y'(t) = \frac{1}{y(t)} \sqrt{1 - y(t)^2}$;

d) $y'(t) = (\alpha^2 + t^2)(\beta^2 + y(t)^2)$, wobei $\alpha, \beta > 0$.

Aufgabe 4: (Verhalten maximaler Lösungen)
Finden Sie jeweils ein Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung, so dass in Satz 4.18

a) in t^- und in t^+ der Fall (2) eintritt;

b) in t^- der Fall (3) und in t^+ der Fall (1) eintritt;

Hinweis: Finden Sie zunächst eine Funktion y mit den entsprechenden Eigenschaften und dann eine Funktion f, so dass $y'(t) = f(t, y(t))$ für $t^- < t < t^+$.

Präsenzaufgaben zu Blatt 9

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 06./07.06.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf (a, b).

b) Seien $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig sowie $(t_0, y_0) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ eine eindeutige lokale Lösung.

c) Unter den Voraussetzungen von Satz 4.18 seien $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sowie $(t_0, y_0) \in D$. Dann gilt für die maximale Lösung zum Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ entweder $t^+ = \infty$ oder $\limsup_{t \to t^+} y(t) = \infty$.

Aufgabe 2: (Explizite Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen)
Betrachten Sie die Anfangswertprobleme

a) $y'(t) = te^{-y(t)}$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$,

b) $y'(t) = t^2 e^{-y(t)}$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$,

c) $y'(t) = y(t)^2 + 1$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$,

d) $y'(t) = y(t)^2 - 1$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{ \pm 1 \}$,

und bestimmen Sie jeweils explizit eine maximale Lösung; bestimmen Sie dabei auch $t^-(y_0)$ und $t^+(y_0)$.