Übungsblatt 10

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 12.06.2018, Abgabe: Di., 19.06.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Substitution, $4+4+4$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine Lösung zu folgenden Anfangswertproblemen:

a) $y'(t) = \sin(t - y(t))^2$, $y(0) = 0$;

b) $2ty(t)y'(t) = t^2 + 3y(t)^2$, $y(1) = 0$;

c) $y(t)^3 - t^2 + ty(t)^2 y'(t) = 0$ für $y(1) = 1$.

B **Aufgabe 2:** (Exakte Differentialgleichungen, $3+3$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine Lösung zu folgenden Anfangswertproblemen:

a) $y(t)^2 + 2ty(t)y'(t) = 0$, $y(1) = 1$;

b) $y(t)\cos(ty(t)) + ty'(t)\cos(ty(t)) = 0$, $y(1) = 1$.

B **Aufgabe 3:** (Potenzreihenansatz, 3 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Potenzteihenansatzes eine Lösung zum Anfangswertproblem $y'(t) = 2ty(t)$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (Verallgemeinerung des Gronwall-Lemmas)
Seien $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ und $h \in C(J, [0, \infty))$. Für $\phi \in C(J, [0, \infty))$ gelte

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t h(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in J.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\phi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t h(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \in J.$$

Präsenzaufgaben zu Blatt 10

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 13./14.06.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Ein Potenzreihenansatz zur Lösung einer Differentialgleichung macht nur dann Sinn, wenn alle Koeffizienten in der Gleichung C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind.

b) Existiert eine Stammfunktion zu $f = (f_1,\, f_2)$, dann folgt $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.

c) Der Kern $\ker T := \{\, x \in E \,:\, Tx = 0 \,\}$ einer linearen Abbildung $T : E \longrightarrow F$ zwischen zwei Vektorräumen E, F ist ein linearer Raum.

Aufgabe 2: (Substitution/Exakte Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie jeweils eine Lösung zu folgenden Anfangswertproblemen:

a) $y'(t) = (y(t) + t)^2$, $y(0) = 0$;

b) $y(t)y'(t) + t = 0$, $y(1) = 1$;

c) $y(t)^2 + 2ty(t)y'(t) = 0$, $y(1) = 1$.