Übungsblatt 11

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 19.06.2018, Abgabe: Di., 26.06.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Lineare Differentialgleichungen, $6+3+1+1+2$ Punkte)
Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.
2. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A.
3. Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.
4. Bestimmen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.
5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

B **Aufgabe 2:** (Lineare Differentialgleichungen, $3+2$ Punkte)
Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $(z_1(t), z_2(t))$ der homogenen Gleichung.
2. Bestimmen Sie eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

B **Aufgabe 3:** (Lineare Differentialgleichungen, 3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Differentialgleichung

$$y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = 0, \qquad\qquad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, $y(t) = te^{\lambda t}$, $y(t) = t^2 e^{\lambda t}$, ...

Aufgabe 4: (Die Exponentialreihe für Matrizen)
Beweisen Sie Satz 6.11 aus der Vorlesung:

a) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ konvergent – d. h. die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ist normkonvergent und damit konvergent.

b) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ ist $e^{A+B} = e^A e^B$.

c) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist durch $Z(t) := e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des (Matrix-) Anfangswertproblems $Z'(t) = AZ(t)$, $Z(0) = I_n$ gegeben. Eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$, wenn $y(t) = Z(t)y_0$ für ein $y_0 \in \mathbb{C}^n$ ist.

Präsenzaufgaben zu Blatt 11

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 20./21.06.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind immer lösbar.

b) e^A kann für nicht diagonalisierbare Matrizen A nicht definiert werden.

c) Ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ einer Matrix A echt kleiner als seine algebraische Vielfachheit, dann ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 2: (Lineare Differentialgleichungen)
Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.
2. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A.
3. Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.
4. Bestimmen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.
5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

Hinweis: In diesem Fall bedeutet Variation der Konstanten, dass

$$y(t) = e^{tA}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: (Lineare Differentialgleichungen)
Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -1$ von A.
2. Ergänzen Sie die Lösung $z_1(t) = ve^{\lambda t}$ der homogenen Gleichung durch eine Lösung $z_2(t) = (w + tv)e^{\lambda t}$ mit $w \in \mathbb{R}^2$ zu einem Fundamentalsystem.
3. Bestimmen Sie eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

Hinweis: Aufgrund der Struktur von A ist $\lambda = -1$ der einzige Eigenwert von A. Die Matrix A ist offenbar in Jordan-Normalform; λ hat also algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1.