Übungsblatt 12

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 26.06.2018, Abgabe: Di., 03.07.2018

B **Aufgabe 1:** (Polarkoordinaten, 1 + 2 Punkte)
Betrachten Sie das autonome Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \qquad t \in I, \qquad\qquad u(0) = u_0,$$

auf dem Existenzintervall I der maximalen Lösung, wobei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist als

$$f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - x^2 - y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Leiten Sie eine Formulierung in Polarkoordinaten her.

(b) Bestimmen Sie die stationären und periodischen Lösungen des Systems.

Hinweis: Für Teil a) macht man den Ansatz $u(t) = (x(t), y(t))^\top = r(t)\,(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))^\top$ und leitet Differentialgleichungen für $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ und $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ her.

B **Aufgabe 2:** (Stabilität, 6 + 6 + 3 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -4y_1 \end{pmatrix} \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie mithilfe von Satz 7.5 die Stabilität der Nulllösung der Differentialgleichungssysteme.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme.

c) Zeichnen Sie die zugehörigen Phasenportraits.

Hinweis: Beachten Sie bei Teil b) für das dritte Differentialgleichungssystem die Bemerkung 6.18.

B **Aufgabe 3:** (Stabilität, 3 Punkte)
Untersuchen Sie anhand der Definition 7.4 die Nulllösung des Differentialgleichungssystems $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

auf Stabilität.

Aufgabe 4: (Die Exponentialreihe für Matrizen)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für jeden Eigenwert λ von A. Zeigen Sie, dass $C \geq 1$ und $\beta > 0$ existieren, so dass $|e^{tA}| \leq Ce^{-\beta t}$ für alle $t \geq 0$.

Präsenzaufgaben zu Blatt 12

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 27./28.06.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Bei stetiger Abhängigkeit von den Daten gilt auch Stabilität.

b) Eine stationäre Lösung ist entweder asymptotisch stabil oder instabil.

c) Sind alle Eigenwerte von A reell und kleiner gleich Null, dann ist die Nulllösung von $y' = Ay$ stabil.

Aufgabe 2: (Polarkoordinaten)
Betrachten Sie das autonome Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \qquad t \in I, \qquad\qquad u(0) = u_0,$$

auf dem Existenzintervall I der maximalen Lösung, wobei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist als

$$f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{g(r)}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei c eine Konstante ist und g eine stetige Funktion. Leiten Sie eine Formulierung in Polarkoordinaten her.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(t) = (x(t),\, y(t))^\mathsf{T} = r(t)\,(\cos(\varphi(t)),\, \sin(\varphi(t)))^\mathsf{T}$ und leiten Sie Differentialgleichungen für $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ und $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ her.

Aufgabe 3: (Stabilität)
Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{pmatrix} -3y_1 \\ -2y_2 \end{pmatrix} \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$f(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie mithilfe von Satz 7.5 die Stabilität der Nulllösung der Differentialgleichungssysteme.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme.

c) Zeichnen Sie die zugehörigen Phasenportraits.

Hinweis: Beachten Sie bei Teil b) für das zweite Differentialgleichungssystem die Bemerkung 6.18.

Aufgabe 4: (Stabilität)
Untersuchen Sie anhand der Definition 7.4 die Nulllösung des Differentialgleichungssystems $y' = f(y)$ mit $y(0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0)^T$, wobei

$$f(y) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

auf Stabilität.