Übungsblatt 13

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 03.07.2018, Abgabe: Di., 10.07.2018

B **Aufgabe 1:** (Stabilität, $3+2+5+2+5+4$ Punkte)
Betrachten Sie das autonome Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(u(t)), \qquad t^-(u_0) < t < t^+(u_0), \qquad u(0) = u_0,$$

auf dem Existenzintervall $(t^-(u_0),\, t^+(u_0))$ der maximalen Lösung, wobei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist als

$$f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - x^2 - y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Nach Aufgabe 12.1 hat dieses Problem die stationäre bzw. periodische Lösung

$$u_1,\, u_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad u_1 \equiv 0, \qquad u_2(t) = (\cos(t),\, \sin(t))^\mathsf{T}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Leiten Sie eine Formulierung des Problems in der Form

$$v'(t) = A_1 v(t) + g_1(v(t)), \qquad t^-(v_0) < t < t^+(v_0), \qquad v(0) = v_0,$$

her mit $A_1 := Df(u_1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1 und entscheiden Sie, ob das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz 7.7 und Bemerkung 7.8) eine Aussage über die Stabilität von u_1 erlaubt. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität von u_1.

(c) Leiten Sie für $v = u - u_2$ eine Formulierung des Problems in der Form

$$v'(t) = f_2(t,\, v(t)) = A_2 v(t) + g_2(t,\, v(t)), \qquad t^-(v_0) < t < t^+(v_0), \qquad v(0) = v_0, \tag{1}$$

her mit $A_2 := Df_2(0,\, 0)|_{t=0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_2 und entscheiden Sie, ob das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz 7.7 und Bemerkung 7.8) eine Aussage über die Stabilität von u_2 erlaubt. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität von u_2.

(e) Zeigen Sie, dass die Formulierung des Problems (1) in Polarkoordinaten auf ein autonomes System

$$\begin{pmatrix} \rho'(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} = h_2\begin{pmatrix} \rho(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \qquad t^-(\rho_0,\, \phi_0) < t < t^+(\rho_0,\, \phi_0), \qquad \begin{pmatrix} \rho(0) \\ \phi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix},$$

mit $h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R}^2)$ führt, wobei $h_2(0,\, 0) = (0,\, 0)$ ist.

(f) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad L_2(\rho,\, \phi) := \tfrac{1}{4}\rho^4 + \rho^3 + \rho^2, \qquad (\rho,\, \phi)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2,$$

eine Lyapunov-Funktion zu dem autonomen Problem aus (e) am Punkt $(0,\, 0)$ ist. Entscheiden Sie auf Basis dieser Lyapunov-Funktion, ob die periodische Lösung u_2 des ursprünglichen Anfangswertproblems stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

Hinweis: Die Gleichung $u' = f(u)$ kann in Polarkoordinaten geschrieben werden als $r' = (1 - r^2)r$ und $\varphi' = 1$; vgl. Aufgabe 12.1. Die Polarkoordinaten von v in (c)–(f) sind gegeben als $\rho = r - 1$ und $\phi = \varphi - t$.

Aufgabe 2: (Normen und Metriken)
Zeigen Sie, dass durch $(x,\, y) \mapsto \sqrt{|x - y|} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\, \infty)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird, die nicht von einer Norm erzeugt ist.

Präsenzaufgaben zu Blatt 13

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 04./05.07.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Zu einem autonomen System existiert eine Lyapunov-Funktion.

b) Die Nulllösung von $y' = -y + y^3$ ist asymptotisch stabil.

c) Ein Strudelpunkt kann stabil oder instabil sein.

Aufgabe 2: (Stabilität)
Betrachten Sie die autonomen Systeme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in J(x_0, y_0), \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $J(x_0, y_0)$ das Existenzintervall der maximalen Lösung zum Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet und

$$\text{(i)} \quad f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^3 + \eta^3 - \xi \\ -\xi\eta^2 - 2\eta \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^3 + \eta^3 + \xi \\ -\xi\eta^2 - 2\eta \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \quad f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi^3 + \eta^3 \\ -\xi\eta^2 \end{pmatrix}.$$

a) Leiten Sie jeweils eine Linearisierung des Problems in der Form

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in J(x_0, y_0), \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

mit $A := Df(0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ her.

b) Entscheiden Sie weiterhin jeweils, ob das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz 7.7 und Bemerkung 7.8) für die stationäre Lösung $(x, y) \equiv 0$ angewendet werden kann. Machen Sie ggf. eine Aussage über die Stabilität dieser stationären Lösung.

c) Zeigen Sie, dass im Fall (iii) durch

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad L(\xi, \eta) := \xi^2 + \eta^2, \qquad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

eine Lyapunov-Funktion am Punkt $(0, 0)$ gegeben ist. Ist diese strikt?