

1. Metrische Räume und metrisierte Vektorräume

(01)

1.1 Definitionen und Beispiele

Def. Gegeben sei eine Menge X . Eine Abbildung

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Metrik, falls $\forall x, y, z \in X$ gilt.

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetri}),$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Metrik d heißt ein metrischer Raum.

Bem.: Für jede Metrik gilt $d(x, y) \geq 0$, denn

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Bsp. (1) Bekannt: (\mathbb{R}, d) bzw. (\mathbb{C}, d) mit $d(x, y) = |x - y|$.

Dies ist die übliche Betrachtungsweise! Es gibt jedoch

Alternativen:

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (\mathbb{K} wird in folgenden häufig so benutzt), $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ injektiv. Dann wird durch

$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$ eine Metrik auf \mathbb{K} definiert.

$$(M1): d_f(x, y) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff x = y \quad f \text{ injektiv}.$$

$$(M3): d_f(x, z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)|$$

$$\Delta\text{-Längl. } \left\{ \begin{array}{l} \neq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \\ \text{für } 1 \cdot 1 \end{array} \right\}$$

(3) Die triviale Metrik $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x=y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$ (H2)
 (X beliebig, $\neq \emptyset$)

(4) Metrisches Teorraum: Ist (X,d) eine metrische Raum und $Y \subset X$, so wird durch $(Y, d|_{Y \times Y})$ eine metrische (Teil)raum erklärt. Hierbei:

$$d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto d(x,y) \quad (\text{Einschränkung})$$

der Abb. durch \dots

üblicherweise: (Y,d) anstelle von $(Y, d|_{Y \times Y})$, wenn Bsp-verständnisse ausgeschlossen sind.

Der Absolutbetrag auf \mathbb{K} ist ein Spezialfall einer allgemeinen Skalierung, die metriken erweitert.

Def.: Es sei X ein Vektorraum über \mathbb{K} . Dann heißt
 eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} \quad (\text{Homogenität})$$

$$(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

eine Norm auf X . Ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt ein normiertes Vektorraum.

Der Zusammenhang zur Metrik stellt der folgende Satz her:

Satz 1: Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein metrischer Vektorraum und

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|,$$

so ist (X, d) ein metrischer Raum. Insbes. gilt
 $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X.$

Bew.: (M1): $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \stackrel{(N1)}{\Leftrightarrow} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$

(M2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| \stackrel{(N2)}{=} \|y - x\| = d(y, x).$

(M3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \stackrel{(N3)}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\|$

$$= d(x, y) + d(y, z). \quad \square$$

Bew.: Der "Umkehrung" von Satz 1 gilt nicht, selbst wenn ein Vektorraum X zugrunde liegt. Bsp. ist die Trivialmetrik, hier ist die Forderung (N2) nicht erfüllt.

Beispiele für metrische Vektorräume:

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume:

Der Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle , \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

versehen, d.h. es gelten $\forall x, y, z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad (\text{Linearität in der ersten Komponente})$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (\text{euklidisch})$$

bzw.
 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (\text{unitär}),$

• $\langle x, x \rangle \geq 0$ mit " $=$ "; genau dann, wenn $x = 0$. (H4)

Dann wird durch $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf X definiert.

Bew.: (N1) $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ 3. ES von \langle, \rangle

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2 \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|.$$

1. und 2.

(N3) Beim Nachweis der Dreiecksungleichung benötigen wir zunächst die sog. Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{C.S.})$$

Seis ist klar, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist, insbes. also, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

Weiter $\langle x, y \rangle \neq 0$ ist, wählen wir $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$$\bar{\mu} = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\langle x, y \rangle}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x - \mu y\|^2 = \langle x - \mu y, x - \mu y \rangle = \|x\|^2 - 2 \underbrace{\operatorname{Re} \langle x, \mu y \rangle}_{= 1} + \underbrace{|\mu|^2 \|y\|^2}_{|\langle x, y \rangle|}$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2), \text{ d.h. die Behauptung falls } \|x\| = \|y\| = 1.$$

$$\text{Allgemein: } |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| |\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \Rightarrow (\text{C.S.})$$

$$(\text{N3}) \text{ zuende: } \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \quad (\text{C.S.})$$

□

Spezialfälle euklidischer bzw. unitärer Vektorräume:

(1.1) Der $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

wird durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$:

zu einem euklidischen VR mit der Norm

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.2) $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$ erhält durch

$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$ ein Skalarprodukt und wird

gleichermaßen zu einem unitären Raum mit Normen

$$\|z\| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.3) Der Folgeraum $\ell_2(\mathbb{N}) := \{z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty\}$

ist $\langle z, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n}$ bzw. $\|z\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

ist unitär und daher beschränkt.

(1.4) Der Funktionerraum $C([a, b], \mathbb{C})$ aller auf

$[a, b]$ stetigen komplexwertigen Funktionen

wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

zu einem unitären Vektorraum mit der Norm

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Noch zu (1.4): Die formal identische Bilinearform

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

ist eben falls wohldefiniert für Funktionen $f, g \in R([0, b], \mathbb{C})$ der auf $[0, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen. In diesem Fall erhalten wir jedoch nur ein Halb- (oder semi-) Skalarprodukt, dieses z.B. für Funktionen die nur für endlich viele Punkte $x \in [0, b]$ von Null verschieden sind,

$$\text{gilt } \langle f, f \rangle = \int_0^b |f(x)|^2 dx = 0,$$

obwohl f nicht die Nullfunktion ist.

Für $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$, so erhält man entsprechend nur eine Halbnorm anstelle einer Norm.

2. p -Normen ($1 \leq p \leq \infty$)

(2.1) Für $x \in K^n$ definiert man

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty \text{ ist, und}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|.$$

Für $p=2$ stimmt dies mit der oben eingeführten euklidischen Norm überein: $\|x\| = \|x\|_2$.

$$\text{Offensichtlich sind die Norm-eigenschaften (N1) und (N2) erfüllt, nicht trivial hingegen ist}$$

der

Beweis der Dreiecksungleichung für $1 < p < \infty$:

(H7)

Wir benötigen dazu die aus der Analysis I bekannte

Höldersche Ungleichung: $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_p$,

wobei $1 < p, p' < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (Übung zur Ana I,
Aufgabe 45)

Dann haben wir

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$$

D's Ungl. in K

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1) \cdot p'} \right)^{\frac{1}{p'}} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

Hölder

Nun ist $\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p'} = \frac{1}{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$ und somit

der 1. Faktor $= \|x+y\|_p^{\frac{p}{p'}}$. Division beider Seiten hier-

durch ergibt

$$\|x+y\|_p^{\frac{p}{p'}} = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{p'}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Der Fall $\|x+y\|_p = 0$ ist trivial. □

Die Fälle $p=1$ und $p=\infty$ besprechen wir in der Übung
oder im Tutorium.

(2.2) Die Folgeräume $\ell^p(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\}$ (H8)

wobei die Normen $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ ähnlich wie in 2.1 gegeben sind:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } 1 \leq p < \infty, \text{ und}$$

$$\|x\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Zum Nachweis der Dreiecksungleichung verwendet man die ebenfalls gültige Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_p, \quad (1 < p, p' < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$$

der Hölderschen Ungleichung.

Bem.: Einfacler Bsp. eines ∞ -dim. normierten Vektorraums.
Für $p=2$: Norde Raum + von einem Skalarprodukt

(2.3) Auch auf $C([a, b], \mathbb{C}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$

werden durch

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty) \quad \text{und}$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad ("Supremumsnorm"; \\ \text{wichtig!})$$

Normen definiert. Legt man für $\| \cdot \|_p$ den Raum $R([a, b], \mathbb{C}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ Riemann-integrierbar}\}$ zugrunde, erhält man wieder nur eine Halbnorm. $\| \cdot \|_{\infty}$ liefert sogar auf dem Raum der lediglich beschränkten Funktionen eine Norm.

3. Norm einer beschränkten linearen Abbildung

(Hg)

Gegeben seien normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|_X)$

und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und eine lineare Abbildung $A: X \rightarrow Y$

Def. A heißt beschränkt, falls ein $C > 0$ existiert,

$$\text{so dass } \|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Def.: Die beschränkten linearen Abbildungen $A: X \rightarrow Y$

bilden einen Vektorraum $L(X, Y)$, der durch

$$\|A\| := \sup \left\{ \|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\}$$

normiert wird.

Bew.: $L(X, Y)$ ist ein Untervektorraum von $Hom(X, Y)$,
espresso sind nur die Norm-eigenschaften zu überprüfen:

$$(N1) \|A\| = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|_Y = 0 \quad \forall x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\|_Y = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow A = 0$$

$\|\cdot\|_Y$ ist eine Norm

$$(N2) \|\lambda A\| = \sup \left\{ \|\lambda(Ax)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\}$$

$$= \sup \left\{ |\lambda| \|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} = |\lambda| \|A\|.$$

$$(N3) \|A+B\| = \sup \left\{ \underbrace{\|(A+B)x\|_Y}_{\stackrel{= Ax+Bx}{\longrightarrow}} : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \|Ax\|_Y : x \in X \right\} + \sup \left\{ \|Bx\|_Y : x \in X \right\} \quad (N3 \text{ für } \|\cdot\|_Y)$$

$$\leq \|A\| + \|B\|.$$

(exkl. als Übung für's Tutorium)