Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2010/11
11.02.2011

Klausur zu Analysis II - Lösungen

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existiert jede Richtungsableitung von f.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   Die Aussage ist richtig. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen impliziert die totale D'barkeit und damit die Existenz aller Richtungsableitungen.

   b) Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gelten die Implikationen: sternförmig $\Rightarrow$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ konvex.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   Die Aussage ist falsch, da nicht jede wegzusammenhängende Menge konvex ist.

   c) Durch $||x|| = |x_1| + |x_2 x_3|$ wird eine Norm auf $\mathbb{K}^3$ definiert.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   Auch dies ist falsch, hier sind sogar alle drei Normeigenschaften verletzt.

   d) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ (versehen mit der Standardmetrik) ist kompakt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

   Richtig, dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass.

e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ konform, so ist f überall lokal umkehrbar.

Antwort: richtig ◯ falsch ◯ (+2/-1 P.)

Richtig aufgrund des Satzes über inverse Abbildungen, da $|\mathrm{detDf(x)}| = \rho(x) > 0$ (vgl. ÜA 35, 36).

2. Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau. (5 P.)

Jede kontrahierende Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) in sich besitzt genau einen Fixpunkt.

3. Es seien $r > 0, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ und $S = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ (Schraubenlinie oder Helix).

a) Berechnen Sie für $a < b$ die Bogenlänge $L_a^b(\gamma)$. (4 P.)

Es ist

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$$

und daher aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Damit ergibt sich die Bogenlänge zu

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = (b - a)\sqrt{r^2 + c^2}.$$

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Kosinus des Schnittwinkels der Schraubenlinie mit dem Kreis $K = \{(r \cos(t), r \sin(t), 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

Die beiden Kurven schneiden sich genau dann, wenn $ct = 0$ gilt, also für $t = 0$ im Punkt $(r, 0, 0)$.

Für den Tangentialeinheitsvektor an γ ergibt sich mit der Rechnung zu (a)

$$T_\gamma(0) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}(-r \sin t, r \cos t, c).$$

Für $c = 0$ ist dies zugleich die Tangente an den Kreis. Nennen wir dessen Parametrisierung β, so ist also

$$T_\beta(0) = \frac{1}{r}(-r \sin t, r \cos t, 0) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Damit erhalten wir für den Schnittwinkel θ der Wege γ und β in $t = 0$

$$\cos\theta = \langle T_\gamma(0), T_\beta(0)\rangle = \frac{r}{\sqrt{r^2 + c^2}}.$$

(5 P.)

4. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x(x-1)^2 - 2y^2$.

   a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f . (4 P.)

   Wir haben

$$\nabla f(x, y) = ((x-1)(3x-1), -4y),$$

   die notwendige Bedingung $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ist also genau in den Punkten $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (\frac{1}{3}, 0)$ erfüllt.

   b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf., ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt. (4 P.)

   In $(x, y) = (1, 0)$ ist die Hesse-Matrix indefinit, also liegt kein Extremum vor, in $(x, y) = (\frac{1}{3}, 0)$ ist die Hesse-Matrix negativ definit, also existiert hier ein lokales Maximum.

   c) Besitzt f globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P.)

   Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty$, existiert kein globales Extremum.

5. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}.$$

(6 P.)

Lösung mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Mit $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$ ist

$$\nabla(f - \lambda g)(x, y) = (y, x) - \lambda(\frac{x}{2}, 2y).$$

Notwendig für ein Extremum ist also $y = \lambda\frac{x}{2}$ sowie $x = 2\lambda y$. Durch elementare Rechnungen unter Einbeziehung der Nebenbedingung ergeben sich hieraus genau vier kritische Punkte: $P_1 = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_2 = (\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3 = (-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_4 = (-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Der Vergleich der Funktionswerte zeigt jetzt, dass $\max\{f(x, y) : (x, y) \in E\} = f(P_1) = f(P_4) = 1$ und $\min\{f(x, y) : (x, y) \in E\} = f(P_2) = f(P_3) = -1$.

6. a) Bestimmen Sie eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derart, dass $\operatorname{grad}\phi(x, y, z) = (yz, zx, xy)$. (2 P.)

   Man berechnet

$$\int yz dx = xyz + c(y, z)$$

und entsprechende Integrale für die anderen Komponenten. Der Vergleich zeigt, dass $\phi(x,y,z) = xyz$ der geforderten Bedingung genügt.

b) Für die Funktion ϕ aus Teil (a) berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(x_0,y_0,z_0)$ nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ im Punkt $(x_0,y_0,z_0) = (1,3,2)$. (2 P.)

Da ϕ total d'bar ist, gilt $\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(x,y,z) = \langle\nabla\phi(x,y,z),\xi\rangle$. Anwendung im vorliegenden Fall ergibt den Wert $\frac{7}{\sqrt{3}}$.

c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ gibt mit $\operatorname{grad}\phi(x,y,z) = (xy,yz,zx)$. Für eine solche Funktion würde $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$ gelten, vgl. ÜA 32. Es ist aber $\operatorname{rot}(xy,yz,zx) = -(y,z,x) \neq 0$.

(4 P.)

d) Gibt es überhaupt eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\phi(x,y,z) = (xy,yz,zx)$? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 P.)

Nein, aufgrund von Teil (c), da die Identität $\operatorname{grad}\phi(x,y,z) = (xy,yz,zx)$ bereits $\phi \in C^2$ nach sich zieht.

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy + x^3 \qquad\qquad y(0) = y_0$$

(8 P.)

Aus der Vorlesung ist die Darstellung

$$y(x) = \phi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\phi(t)}dt\right), \qquad\qquad \phi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$$

der Lösung der inhomogenen linearen Gleichung bekannt, wobei im vorliegenden Fall $x_0 = 0$, y_0 beliebig, $a(t) = t$ und $b(t) = t^3$ sind. Also

$$\phi(x) = \exp\left(\int_0^x t dt\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

und daher

$$\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\phi(t)}dt = \int_0^x t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = -\int_0^x t^2\left(-t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)dt,$$

wobei $-t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ gilt. Also erhält man durch zweifache partielle Integration

$$\cdots = -x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \int_0^x 2t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = -(x^2+2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2.$$

Zusammenfassung:

$$y(x) = (y_0 + 2)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - (x^2+2).$$

Die Klausur gilt mit 25 (bzw. mit 20) Punkten als bestanden.