Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
24./25.10.2012
Blatt 0 - Präsenzaufgaben

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

1. Gegeben seien metrische Räume (X, d) und (X', d'). Für $(x, x') \in X \times X'$ und $(y, y') \in X \times X'$ definiert man

$$\delta((x, x'), (y, y')) := d(x, y) + d'(x', y').$$

Zeigen Sie:

(a) δ ist eine Metrik auf $X \times X'$.
(b) Sind U offen in (X, d) und U' offen in (X', d'), so ist $U \times U'$ offen in $(X \times X', \delta)$.

2. Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $\mathcal{A} = \{A \subset X : A^c \in \tau\}$ das System abgeschlossener Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
(b) $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ (I beliebige Indexmenge),
(c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Geben Sie dabei stets an, wenn Sie eine der charakterisierenden Eigenschaften (T1) bis (T3) einer Topologie verwenden. Nennen Sie ein Beispiel für eine unendliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, die nicht abgeschlossen ist.

3. Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Werten in einem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie:

(a) Der Grenzwert der Folge (a_n) ist eindeutig bestimmt.
(b) (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Machen Sie in Ihren Beweisen deutlich, wo Sie welche Eigenschaften einer Metrik verwenden.

Bearbeitung und Besprechung: Mi., 24.10.2012 und Do., 25.10.2012