Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
16.10.2012
Blatt 1

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

1. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $p \in [1, \infty)$ sei

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweisen Sie für $p \leq q$ die Ungleichungen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

2. Es bezeichne $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{C})$ den Vektorraum aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Für $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{C})$ und $p \in [1, \infty)$ sei

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweisen Sie für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(a) die Höldersche Ungleichung

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

(b) die Minkowski'sche Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Hinweis zu (a): Verwenden Sie die Young'sche Ungleichung $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'}$.

3. (Hölder'sche Ungleichung für $p \in (0,1)$) Es seien $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \left(\int_a^b f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(x)^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

wobei $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} < 0$. Hinweis: Wenden Sie die Hölder'sche Ungleichung $\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx \leq \|\phi\|_q \|\psi\|_{q'}$ mit $q = \frac{1}{p}$ und geeigneten Funktionen ϕ und ψ an.

Bitte wenden!

Empfehlung: Stellen Sie zu Ihrem eigenen Gebrauch eine Tabelle mit 15 bis 20 Funktionen und zugehörigen Stammfunktionen zusammen, die Ihnen aus der Vorlesung zur Analysis I bekannt sind. Diese Tabelle sollte auch - als Stammfunktionen - die Umkehrfunktionen der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen umfassen.

4. Die folgenden Ausdrücke haben die Gestalt $f(g(x)) \cdot g'(x)$ oder lassen sich durch einfache Umformung in dieser Weise darstellen. Geben Sie die zugehörigen Stammfunktionen an.

(a) $\dfrac{x}{1+x^4}$ (b) $\dfrac{\tan^k(x)}{\cos^2(x)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

(c) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\sqrt{1+\cos(x)}$ (d) $\sin^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$

In Teil (c) sei zusätzlich $|x| \leq \pi$ vorausgesetzt.

Abgabe: Di., 23.10.2012, 10.15 Uhr

Besprechung: Mi., 31.10.2012 und Fr., 02.11.2012