Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
23.10.2012
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

5. Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

6. Bestimmen Sie $\partial M, \overline{M}$ und M° für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$ (versehen mit der euklidischen Norm):

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$,
(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

7. (Lindelöf'scher Überdeckungssatz) Zeigen Sie: Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Um dies einzusehen, vereinige man möglichst grosse Intervalle um die rationalen Elemente von U.

Bitte wenden!

8. Leiten Sie Rekursionsformeln der Gestalt

$$a_n I_{n+2}(x) = f_n(x) + b_n I_n(x), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

für die folgenden unbestimmten Integrale her:

(a) $I_n(x) = \displaystyle\int (1 - x^2)^{n-1/2} dx \qquad (|x| < 1)$

(b) $I_n(x) = \displaystyle\int \tan^n(x) dx \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

Geben Sie auch Stammfunktionen für spezielle Werte von n an, die es im Prinzip erlauben, mit Hilfe der Rekursionsformel $I_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu berechnen.

Hinweis: In Teil (a) führt partielle Integration zum Ziel, für Teil (b) beachte man $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und verwende die Substitutionsregel.

Abgabe: Di., 30.10.2012, 10.15 Uhr

Besprechung: Mi., 07.11.2012 und Do., 08.11.2012