

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

13. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge  $f_n$  auf  $\mathbb{R}$  punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion  $f$ . Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen  $I = [0, 2]$  bzw.  $J = [2, \infty)$  die Konvergenz gleichmässig ist.

14. Zeigen Sie, dass für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(A) = \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es gilt  $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und die Potenzen  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$  können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

15. (**Poisson-Kern für den Kreis**) Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $q \in (-1, 1)$  sei

$$P(q, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{|k|} e^{ikx}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes  $r \in [0, 1)$  diese Reihe auf  $\{(q, x) \in \mathbb{R}^2 : |q| \leq r\}$  absolut und gleichmässig konvergiert, und verifizieren Sie die Identität

$$P(q, x) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}.$$

16. Zeigen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx.$$

**Abgabe:** Di., 13.11.2012, 10.15 Uhr

**Besprechung:** Mi., 21.11.2012 und Do., 22.11.2012