Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
13.11.2012
Blatt 5

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

17. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

18. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, so dass für $x \in [-\pi, \pi]$ gilt $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$.

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(b) Verifizieren Sie die Darstellung

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

19. Ausgehend vom Ergebnis in Teil (b) der Aufgabe 18

(a) berechne man die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;;$$

Bitte wenden!

(b) leite für $0 \leq x \leq \pi$ durch gliedweise Integration (weshalb ist dies zulässig?) die Darstellungen

$$\frac{x}{2}(\pi - x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3} \qquad \text{sowie}$$
$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4} \qquad \text{her und}$$

(c) berechne die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

20. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π - periodisch und stetig. Für die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$ von f gelte $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\widehat{f}(k)| < \infty$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Abgabe: Di., 20.11.2012, 10.15 Uhr

Besprechung: Mi., 28.11.2012 und Do., 29.11.2012