

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

21. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist definiert durch:

$$\text{dist}(K, A) := \inf \{ \text{dist}(x, A), x \in K \} = \inf \{ d(x, y) : x \in K, y \in A \}, \text{ vgl. Aufgabe 10.}$$

Zeigen Sie:

- (a) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\text{dist}(K, A) > 0$.
- (b) Die Aussage in Teil (a) wird im Allgemeinen falsch, wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird.

22. Für zwei Teilmengen A und B von \mathbb{R}^n sei

$$A + B := \{ a + b : a \in A, b \in B \}.$$

- (a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.
- (b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

23. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

$$\text{div } F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz* von F . Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zeige man:

$$\text{div}(\phi F) = \langle \text{grad } \phi, F \rangle + \phi \text{div } F.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$$

(hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ fest).

Bitte wenden!

24. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : x = y = 0 \end{cases}$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \neq \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0).$$

Ist f im Nullpunkt stetig?

Abgabe: Di., 27.11.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 05.12.2012 und Do., 06.11.2012