Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
27.11.2012
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

25. Für $n \geq 3$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$$

sowie $\Delta f(x) := \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ und bestimme denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

26. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$$

definiert man die *Rotation* von F durch

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

(b) Ist $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = (0, 0, 0).$$

Gesucht ist eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} \phi(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

Kann es eine solche Funktion überhaupt geben? Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld F mit $\operatorname{rot} F = x$?

Bitte wenden!

27. Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *konform* in $x \in \Omega$, wenn es eine Zahl $\rho(x) > 0$ gibt, so dass für die Jacobi-Matrix $Df(x)$ gilt

$$Df(x)^\top Df(x) = \rho(x)^2 E_n$$

wobei E_n die $n \times n$- Einheitsmatrix ist. f heißt konform, wenn f in jedem $x \in \Omega$ konform ist. Zeigen Sie, dass die Inversion

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitssphäre (vgl. Aufgabe 9 (b)) konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante $\det Di(x)$?

28. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2 z^3 - 3yz$$

im Punkt (1,2,1) in die Richtungen $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$.

Abgabe: Di., 04.12.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 12.12.2012 und Do., 13.11.2012