Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2012/2013
11.12.2012
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

33. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := y^x$$

berechne man das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschliesslich und anschliessende Auswertung in (x_0, y_0),

(b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

34. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?

(b) Finden Sie eine affine Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

35. Für $1 \leq i, k \leq n$ seine reelle Zahlen b_i und c_{ik} gegeben, so dass

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2 < 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) + b_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

genau eine Lösung besitzt.

Bitte wenden!

36. Gegeben seien Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, die ein spitzwinkliges Dreieck

$$\Delta := \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 : 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

bilden. In einem Punkt x im Innern von Δ sei die Summe der Abstände zu den a_i minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen benachbarten Vektoren $a_i - x$ stets $\frac{2\pi}{3}$ beträgt.

Abgabe: Di., 18.12.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 09.01.2013 und Do., 10.01.2013