Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2014/15
19.03.2015

Nachklausur zu Analysis II

Lösung und Wertung

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Offene und abgeschlossene Mengen)	8 Punkte
A3 (Banachscher Fixpunktsatz)	7 Punkte
A4 (Metrik)	9 Punkte
A5 (Extremwertaufgabe)	16 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	13 Punkte
A7 (Inhomogenes System linearer Dgln. 1. Ordnung)	12 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 37 (von 75 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 30 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)^2$, $y(0) = 1$ besitzt genau eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)^2$, $y(0) = 0$ besitzt genau eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Sind $y_{1,2} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nichttriviale Lösungen einer Dgl. der Form

$$y'' + py' + qy = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ und gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, so existiert eine reelle Zahl λ, für die $y_1 = \lambda y_2$.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion ist symmetrisch.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, und ist $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls kompakt.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **Offene und abgeschlossene Mengen (2+6 P.)**

(a) Geben Sie die Definitionen der Begriffe "offen" und "abgeschlossen" für Teilmengen eines metrischen Raumes (X,d) an.

$\Omega \subset X$ heißt offen, wenn für alle $x \in \Omega$ eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ 1P.

$A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn A^c offen ist. 1P.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der üblichen, d.h. euklidischen Metrik) offen bzw. abgeschlossen sind (Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.):

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy = 0\}$,

abgeschlossen 1P

nicht offen 1P

(ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > n\} = \emptyset$

sowohl offen 1P.

als auch abgeschlossen 1P.

(iii) $\{(x,x^3) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 17\}$

nicht offen 1P.

und nicht abgeschlossen 1P.

3. **(Banachscher Fixpunktsatz, 7 P.)** Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x_2^4+1}, \qquad x_2 = \frac{1}{30}\cos^2(5x_1+e)$$

eine eindeutige Lösung $(x_1^*, x_2^*)^\top \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Wir definieren $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_2^4+1)^{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{30}\cos^2(5x_1+e) \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

Dann ist $f_1(x_2) - f_1(y_2) = f_1'(\xi)(x_2-y_2)$ (MWS) 1P.

und $|f_1'(\xi)| = \frac{1}{3}(\xi^4+1)^{-\frac{3}{4}}|\xi^3| \leq \frac{1}{3}$ 1P.

also $|f_1(x_2) - f_1(y_2)| \leq \frac{1}{3}|x_2-y_2|$ 1P.

Ebenso:

$|f_2(x_1) - f_2(y_1)| \leq \frac{2 \cdot 5}{30}|\cos(5\xi+e)\sin(5\xi+e)||x_1-y_1| \leq \frac{1}{3}|x_1-y_1|$ 1P.

~~Zsf.~~ $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|$ 1P.

Also ist f eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raums $(\mathbb{R}^2, |\,|)$ in sich. Der Banachsche Fixpunktsatz ergibt also die Beh. 1P.

4. (5+4 P.) Es sei

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

(i) $d(x,y) = 0 \iff \arctan(x) = \arctan(y)$

$\iff x = y$; letzteres, da arctan injektiv ist. 2P.

(ii) $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

$= |\arctan(y) - \arctan(x)| = d(y,x)$ 1P.

(iii) $d(x,z) = |\arctan(x) - \arctan(y) + \arctan(y) - \arctan(z)|$

$\leq |\arctan(x) - \arctan(y)| + |\arctan(y) - \arctan(z)|$

$= d(x,y) + d(y,z)$. 2P.

(b) Untersuchen Sie (z.B. anhand der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$), ob $(\mathbb{R}, d)$ mit der oben definierten Metrik d vollständig ist. Formulieren Sie eine Behauptung und begründen Sie diese.

Beh.: $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig. 1P.

Bew.: (x_n) wie angegeben ist Cauchy, 1P.

denn: $d(x_n, x_m) = |\arctan(x_n) - \arctan(x_m)|$

$\leq \frac{\pi}{2} - \arctan(x_n) + \frac{\pi}{2} - \arctan(x_m) \xrightarrow[(n,m \to \infty)]{} 0$ 1P.

Aber (x_n) ist divergent. 1P.

5. **(2+3+2+3+4+2 P.)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 9x - 3y + 24.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die kritische Stelle (x_c, y_c) von f. (Es gibt nur eine.)

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Hess}f(x,y)$.

(d) Untersuchen Sie $\mathrm{Hess}f(x,y)$ auf Definitheit.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass f in (x_c, y_c) ein isoliertes globales Minimum annimmt.

(f) Berechnen Sie $\min\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(a) $\nabla f(x,y) = (2x+y-9,\ x+2y-3)$ 2P.

(b) $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{array}{l} 2x+y=9 \\ x+2y=3 \end{array} \iff \begin{array}{l} x=5 \\ y=-1 \end{array}$,

also $(x_c, y_c) = (5,-1)$ 3P.

(c) $\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2P.

(d) $\mathrm{Hess}\,f(x,y)$ ist positiv definit, 1P.

denn: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$ (also ist $\mathrm{Hess}f(x,y)$ definit) 1P

und die Diagonalelemente sind positiv 1P.

(e) Nach der Taylor-Formel gilt für $h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ und eine Zwischenstelle ξ

$f((x_c,y_c)+h) = f(x_c,y_c) + \nabla f(x_c,y_c)\cdot h + \frac{1}{2}\langle h, \mathrm{Hess}\,f(\xi)h\rangle$ 1P.

$= f(x_c,y_c) + \frac{1}{2}\langle h, \mathrm{Hess}\,f(\xi)\cdot h\rangle$, da $\nabla f(x_c,y_c) = (0,0)$ 1P.

Nun ist $\mathrm{Hess}\,f(\xi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit, d.h.

Weiter zu A5, Teil (e):

es ist $\frac{1}{2}\langle h, \text{Hess} f(?)\, h\rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 1P.

Zsf.: $f((x_c, y_c) + h) > f(x_c, y_c) \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 1P.

(f) $\min\{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = f(x_c, y_c)$ 1P.

$= f(5, -1) = 3$ 1P.

6. **(2+2+1+8 P.)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2$.

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf $\overline{B_2(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

f ist stetig (als Polynom) und $\overline{B_2(0)}$ kompakt. 1P.
Daher folgt die Beh. aus dem Satz vom Maximum. 1P.

(b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\Delta f(x,y)$.

$\nabla f(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ 1P.

$\Delta f(x,y) = 2x - 2x = 0$ 1P.

(c) Begründen Sie, dass $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{B_2(0)}\} = \max\{f(x,y) : (x,y) \in \partial B_2(0)\}$ und ebenso $\min\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{B_2(0)}\} = \min\{f(x,y) : (x,y) \in \partial B_2(0)\}$.

Folgt aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen. 1P.

(d) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf $\partial B_2(0)$ und berechnen Sie $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{B_2(0)}\}$ sowie $\min\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{B_2(0)}\}$.

(Hinweis: Die Aufgabenteile (a) und (c) sind im wesentlichen durch das Zitat passender Sätze aus der Vorlesung zu erledigen.)

Es sind die Extrema von f unter der NB $\varphi(x,y) = 0$ zu bestimmen, wobei $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ist, und hierfür gilt $\nabla\varphi(x,y) = 2(x,y)$ 1P.

Als notwendige Bedingung haben wir: $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y)$, 1P.

also mit (b) und der NB das GlS.

(I) $x^2 - y^2 = 2\lambda x$ (II) $-2xy = 2\lambda y$ (III) $x^2 + y^2 = 4$ 1P.

Weiter zu A6:

1\. Fall: $y = 0 \underset{(III)}{\Longrightarrow} x \in \{\pm 2\}$. Wir erhalten die kritischen Stellen

$$(x_1, y_1) = (2,0) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) = (-2,0) \qquad 1P.$$

2\. Fall: $y \neq 0 \underset{(II)}{\Longrightarrow} \lambda = -x \underset{(I)}{\Longrightarrow} x^2 - y^2 = -2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = y^2$

$$\underset{(III)}{\Longrightarrow} 4x^2 = 4 \Longrightarrow x \in \{\pm 1\} \underset{(III)}{\Longrightarrow} y \in \{\pm\sqrt{3}\}.$$

Dieser Fall ergibt die Extremstellen

$(x_3, y_3) = (1, \sqrt{3})$; $(x_4, y_4) = (1, -\sqrt{3})$; $(x_5, y_5) = (-1, \sqrt{3})$, $(x_6, y_6) = (-1, -\sqrt{3})$

2P.

Berechnung und Vergleich der Funktionswerte ergibt:

$$\max\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{B_2(0)}\} = f(x_1, y_1) = f(x_5, y_5) = f(x_6, y_6) = \frac{8}{3}$$

1P.

$$\min\{f(x,y) : \text{—〃—}\} = f(x_2, y_2) = \ldots = -\frac{8}{3} \qquad 1P.$$

7. **(6+6 P.)** Gegeben sei das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem $y' = Py + Q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} 2x & \cos x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} x \\ e^{x^2} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie dasjenige Lösungsfundamentalsystem Y von $y' = Py$, für das $Y(0) = E_2$ gilt. (E_2 bezeichne die 2×2-Einheitsmatrix.)

(b) Berechnen Sie diejenige Lösung y_p des inhomogenen Systems $y' = Py + Q$, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0, 0)^\top$ genügt.

(a) Variante 1: Es ist $P(x) = 2x\,E_2 + \cos(x) \cdot A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist das gesuchte LFS gegeben durch

$$\cancel{\Phi}(x) = \exp\left(\int_0^x P(t)\,dt\right). \qquad 1P.$$

Dabei ist $\int_0^x P(t)\,dt = \begin{pmatrix} x^2 & \sin(x) \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} =: \mathbb{P}(x)$, $\qquad$ 1P.

und es gilt $\exp(\mathbb{P}(x)) = \exp(x^2) \cdot \exp(\sin(x) \cdot A)$ $\qquad$ 1P.

mit $\exp(\sin(x) \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2P.$$

Zsf. $Y(x) = e^{x^2}\begin{pmatrix} 1 & \sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 1P.

Variante 2: Wir machen den Ansatz $Y(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ 0 & \varphi_{22}(x) \end{pmatrix}$, so dass die φ_{ij} zu bestimmen sind aus

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ 0 & \varphi_{22} \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} 2x & \cos(x) \\ 0 & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ 0 & \varphi_{22}(x) \end{pmatrix}. \qquad 1P.$$

D.h. insbesondere $\varphi_{ii}'(x) = 2x\,\varphi_{ii}(x)$ $\qquad$ 1P.

und daher $\varphi_{ii}(x) = \exp\left(\int_0^x 2t\,dt\right) = \exp(x^2).$ $\qquad$ 1P.

Weiter zu A7, Teil (a), Variante 2: Die Dgl. für φ_{12} lautet:

$$\varphi_{12}'(x) = 2x\,\varphi_{12}(x) + \cos(x)\varphi_{22}(x) = 2x\,\varphi_{12}(x) + \cos(x)\cdot e^{x^2} \qquad 1P.$$

und besitzt die Lösung (Lösungsf. für inhom. lin. Dgl. 1.O.)

$$\varphi_{12}(x) = C\cdot e^{x^2} + e^{x^2}\cdot\int_0^x \cos(t)\,\frac{e^{t^2}}{e^{t^2}}\,dt$$

$$= e^{x^2}\big(C + \sin(x)\big) \qquad 1P.$$

Wir wählen $C=0$ im Hinblick auf die Forderung $Y(0)=E_2$

und erhalten $\underline{Y(x) = e^{x^2}\begin{pmatrix} 1 & \sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ 1P.

(b) Wir haben $Y(x)^{-1} = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1 & -\sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, damit 1P.

$$y_p(x) = Y(x)\cdot\int_0^x Y(t)^{-1}Q(t)\,dt \qquad 1P.$$

$$= Y(x)\cdot\int_0^x \begin{pmatrix} t\cdot e^{-t^2} - \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \qquad 1P.$$

$$= Y(x)\cdot\begin{pmatrix} \cos(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} \\ x \end{pmatrix}$$

davon einen für $\int_0^x t e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}(1-e^{-x^2})$ 2P.

$$= e^{x^2}\begin{pmatrix} \cos(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + x\sin(x) \\ x \end{pmatrix} \qquad 1P.$$