1. Metrische Räume und normierte Vektorräume

1.1 Definitionen und Beispiele

Def. Gegeben sei eine Menge X. Eine Abbildung

$d: X\times X \to \mathbb{R}$ heißt eine <u>Metrik</u>, falls $\forall x,y,z\in X$ gilt

(M1) $d(x,y)=0 \iff x=y$,

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ (Symmetrie),

(M3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Ein Paar (X,d) aus einer Menge X und einer Metrik d heißt ein <u>metrischer Raum</u>.

<u>Bem.</u>: Für jede Metrik gilt $d(x,y)\ge 0$, denn

$$0=d(x,x)\le d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y) \quad \forall x,y\in X.$$

Bsp. (1) Bekannt: $(\mathbb{R},d)$ bzw. $(\mathbb{C},d)$ mit $d(x,y)=|x-y|$.
Dies ist die übliche Betrachtungsweise! Es gibt jedoch Alternativen!

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}$ wird im folgenden häufig so benutzt), $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ injektiv. Dann wird durch

$d_f(x,y):=|f(x)-f(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{K}$ definiert.

(M1): $d_f(x,y)=0 \iff f(x)=f(y) \iff x=y$ f injektiv.

(M3): $d_f(x,z)=|f(x)-f(z)|=|f(x)-f(y)+f(y)-f(z)|$

$\left.\begin{array}{l}\Delta\text{'s-Ungl.}\\ \text{für } |\cdot|\end{array}\right\} \le |f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)|$.

(3) Die triviale Metrik $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{"} \quad x \neq y \end{cases}$ M2

(X beliebig, $\neq \emptyset$)

(4) Metrischer Teilraum: Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$, so wird durch $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer (Teil)raum erklärt. Hierbei:

$$d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto d(x,y)$$ (Einschränkung der Abb. durch $|\ldots$)

Üblicherweise: (Y,d) anstelle von $(Y, d|_{Y\times Y})$, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

Der Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Struktur, die Metriken induziert.

Def.: Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

eine Abbildung

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|$

mit den Eigenschaften

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ (Homogenität)

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$ (Dreiecksungleichung)

eine <u>Norm auf X</u>. Ein Paar $(X, \| \ \|)$ heißt ein <u>normierter Vektorraum</u>.

Den Zusammenhang zur Metrik stellt der folgende Satz her:

<u>Satz 1:</u> Ist $(X, \| \;\|)$ ein normierter Vektorraum und

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto d(x,y) := \|x-y\|,$$

so ist (X,d) ein metrischer Raum. Insbes. gilt

$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X.$

<u>Bew.:</u> (M1): $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \underset{(N1)}{\Leftrightarrow} x-y = 0 \Leftrightarrow x=y.$

(M2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| \underset{(N2)}{=} \|y-x\| = d(y,x).$

(M3) $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \underset{(N3)}{\leq} \|x-y\| + \|y-z\|$

$= d(x,y) + d(y,z).$ $\square$

<u>Bem.:</u> Die 'Umkehrung' von Satz 1 gilt nicht, selbst wenn ein Vektorraum X zugrunde liegt. Bsp. ist die Trivialmetrik, hier ist die Forderung (N2) nicht erfüllt.

<u>Beispiele für normierte Vektorräume:</u>

(1) Euklidische und unitäre Vektorräume:

Der $\mathbb{K}$-Vektorraum X sei mit einem Skalarprodukt

$$\langle \, , \, \rangle : X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

versehen, d.h. es gelten $\forall x,y,z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \mu \langle y,z \rangle$ (Linearität in der ersten Komponente),

- $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (euklidisch)

  bzw. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$, " $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (unitär),

- $\langle x, x\rangle \geq 0$ mit "=", genau dann, wenn $x = 0$.

Dann wird durch $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf X definiert.

Bew.: (N1) $\|x\| = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \underset{\text{3. ES von } \langle\,,\,\rangle}{\iff} x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} \underset{\text{1. und 2.}}{=} (|\lambda|^2 \langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|x\|.$

(N3) Zum Nachweis der Dreiecksungleichung zeigen wir zunächst die sog. Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \text{(C.S.)}$$

Dies ist klar, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ ist, insbes. also, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

Wenn $\langle x, y\rangle \neq 0$ ist, wählen wir $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$$\bar{\mu} = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\langle x, y\rangle}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x - \mu y\|^2 = \langle x - \mu y, x - \mu y\rangle = \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \underbrace{\langle x, \mu y\rangle}_{|\langle x, y\rangle|} + \underbrace{|\mu|^2}_{=1} \|y\|^2$$

$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, d. i. die Behauptung falls $\|x\| = \|y\| = 1$.

Allgemein: $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \|y\| \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leq \|x\| \|y\|. \Rightarrow$ (C.S.)

(N3) zu Ende: $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \underset{\text{(C.S.)}}{\leq} (\|x\| + \|y\|)^2.$

□

Spezialfälle euklidischer bzw. unitärer Vektorräume:

(1.1) Der $\mathbb{R}^n := \{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$

wird durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

zu einem euklidischen VR mit der Norm

$$|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.2) $\mathbb{C}^n := \{ z = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \}$ erhält durch

$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$ ein Skalarprodukt und wird

dadurch zu einem unitären Raum mit Norm

$$|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.3.) Der Folgenraum $\ell_2(\mathbb{N}) := \{ z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty \}$

mit $\langle z, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n}$ bzw. $\| z \| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$

ist unitär und daher normiert.

(1.4) Der Funktionenraum $C([a,b], \mathbb{C})$ aller auf $[a,b]$ stetigen komplexwertigen Funktionen

wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

zu einem unitären Vektorraum mit der Norm

$$\| f \| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Noch zu (1.4): Die formal identische Bilinearform

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx$$

ist ebenfalls wohldefiniert für Funktionen $f,g \in R([a,b],\mathbb{C})$ der auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen. In diesem Fall erhalten wir jedoch nur ein Halb- (oder Semi-)skalarprodukt, denn z.B. für Funktionen die nur für endlich viele Punkte $x \in [a,b]$ von Null verschieden sind, gilt $\langle f,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$, obwohl f nicht die Nullfunktion ist.

Bildet man hieraus $\|f\| = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$, so erhält man entsprechend nur eine Halbnorm anstelle einer Norm.

2. p-Normen ($1 \le p \le \infty$)

(2.1) Für $x \in \mathbb{K}^n$ definiert man

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } 1 \le p < \infty \text{ ist, und}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|.$$

Für $p=2$ stimmt dies mit der oben eingeführten euklidischen Norm überein: $|x| = \|x\|_2$.

Offensichtlich sind die Normeigenschaften (N1) und (N2) erfüllt, nicht trivial hingegen ist der

Beweis der Dreiecksungleichung für $1<p<\infty$:

Wir benötigen dazu die ~~Das der Analysis I bekannte~~

Höldersche Ungleichung: $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \, \|y\|_{p'}$,

wobei $1<p,p'<\infty$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. ~~(Übungen zur Ana I, Aufgabe 45)~~

Beweis siehe H7a (nächste Seite!)

Damit haben wir

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}\,|x_i+y_i|$$

$$\underset{\Delta\text{'s Ungl. in } \mathbb{K}}{\le} \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}\,|x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{p-1}\,|y_i|$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$$

Nun ist $\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p'} = \frac{1}{p-1}\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$ und damit der 1. Faktor $= \|x+y\|_p^{\frac{p}{p'}}$. Division beider Seiten hierdurch ergibt

$$\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{p'}} \le \|x\|_p + \|y\|_p .$$

□

Der Fall $\|x+y\|_p = 0$ ist trivial.

Die Fälle $p=1$ und $p=\infty$ besprechen wir in der Übung oder im Tutorium.

M7a

Beweis der Hölderschen Ungleichung

Step 1: Wir zeigen die Young'sche Ungleichung: Für $x, y \geq 0$ und $p, p' \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (sog. "konjugierte Hölder-exponenten") gilt

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}. \qquad (Y)$$

Dazu betrachten wir $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) := \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-p'}}{p'}$.

Es ist $f'(t) = t^{p-1} - t^{-p'-1} \begin{cases} > 0 & \text{für } t > 1 \\ = 0 & \text{" } t = 1 \\ < 0 & \text{" } t < 1 \end{cases}$. D.h. f besitzt in $t_0 = 1$ ein isoliertes globales Minimum. Es gilt also $\quad 1 = f(1) \leq f(t) \quad \forall\, t > 0.$

Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist (Y) offensichtlich. Sind $x > 0$ und $y > 0$, setzen wir $t = \frac{x^{\frac{1}{p'}}}{y^{\frac{1}{p}}}$. Dann gilt nach obigem

$$1 \leq \frac{x^{\frac{p}{p'}}}{p \cdot y} + \frac{y^{\frac{p'}{p}}}{p' \cdot x} \Rightarrow xy \leq \frac{x^{\frac{p}{p'} + \frac{p}{p}}}{p} + \frac{y^{\frac{p'}{p} + \frac{p'}{p'}}}{p'} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'},$$

und das ist (Y) für $x > 0$ und $y > 0$.

Step 2: Folgerung der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_{p'}.$$

ist klar, wenn $\|x\|_p = 0$ oder $\|y\|_{p'} = 0$. Daher können wir oE. $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$ annehmen (vgl. den Bew. von Cauchy-Schwarz). In diesem Fall erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \underset{(Y)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|^{p'}}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|x\|_p \, \|y\|_{p'}.$$

(2.2) Die Folgenräume $\ell^p(\mathbb{N}) := \{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty \}$ (H8)

wobei die Normen $\| \, \|_p$ für $1 \le p \le \infty$ ähnlich wie in 2.1 gegeben sind:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } 1 \le p < \infty, \text{ und}$$

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$

Zum Nachweis der Dreiecksungleichung verwendet man die ebenfalls gültige Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \|x\|_p \|y\|_{p'} \qquad \left(1 < p, p' < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

der Hölderschen Ungleichung.

Bem.: Einfaches Bsp. eines ∞-dim. normierten Vektorraums. Für $p=2$: Norm kommt von einem Skalarprodukt

(2.3) Auch auf $C([a,b], \mathbb{C}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ stetig} \}$

werden durch

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty) \text{ und}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad (\text{"Supremumsnorm", wichtig!})$$

Normen definiert. Legt man für $\| \, \|_p$ den Raum $R([a,b], \mathbb{C}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ Riemann-integrierbar} \}$ zugrunde, erhält man wieder nur eine Halbnorm. $\| \, \|_\infty$ liefert sogar auf dem Raum der lediglich beschränkten Funktionen eine Norm.

3. Norm einer beschränkten linearen Abbildung

Gegeben seien normierte Vektorräume $(X, \|\ \|_X)$ und $(Y, \|\ \|_Y)$ und eine lineare Abbildung $A: X \to Y$

Def. A heißt <u>beschränkt</u>, falls ein $C \geq 0$ existiert, so daß

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

<u>Bem.</u>: Die beschränkten linearen Abbildungen $A: X \to Y$ bilden einen Vektorraum $L(X,Y)$, der durch

$$\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}$$

normiert wird.

<u>Bew.</u>: $L(X,Y)$ ist ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(X,Y)$, insofern sind nur die Normeigenschaften zu überprüfen:

(N1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|_Y = 0 \quad \forall x \in X$ mit $\|x\|_X \leq 1$

$\Leftrightarrow \|Ax\|_Y = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow A = 0$

$\|\ \|_Y$ ist eine Norm

(N2) $\|\lambda A\| = \sup \{ \|\lambda (Ax)\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}$

$= \sup \{ |\lambda| \, \|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \} = |\lambda| \, \|A\|.$

(N3) $\|A + B\| = \sup \{ \|\underbrace{(A+B)x}_{= Ax + Bx}\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}$

$\|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y$ (N3 für $\|\ \|_Y$)

$\leq \sup \{ \|Ax\|_Y : x \in X \ldots \} + \sup \{ \|Bx\|_Y : x \in X \ldots \}$

$= \|A\| + \|B\|.$ (evtl. als Übung für's Tutorium)