Bsp. zu Fourierreihen: Die Partialbruchzerlegungen des Cotangens und Cosecans (Euler)

Wir fixieren $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und betrachten diejenige stetige, 2π-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die gilt

$$f(x) = \cos(zx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten: Zunächst stellen wir fest, dass f gerade ist, also $f(x) = f(-x)$. Hieraus folgt:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\pi}^{0} f(x) e^{-ikx} dx \Big)$$

Subst. $x \rightsquigarrow -x$ im 2. Integral
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

(Bem.: Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$, erhält man entsprechend $\hat{f}(k) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$.)

In unserem Fall also

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(zx) \cos(kx) dx$$

Jetzt verwenden wir das Additionstheorem

$$\cos((z \pm k)x) = \cos(zx)\cos(kx) \mp \sin(zx)\sin(kx)$$

$$\Rightarrow \cos(zx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\big(\cos((z+k)x) + \cos((z-k)x)\big),$$

so dass

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos((z+k)x) + \cos((z-k)x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big\{ \frac{\sin((z+k)x)}{z+k} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin((z-k)x)}{z-k} \Big|_0^{\pi} \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi} \cdot \sin(\pi z) \cdot \Big(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \Big) = (-1)^k \cdot \frac{z}{\pi} \sin(\pi z) \frac{1}{z^2 - k^2}$$

Nun ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$ (z ist nach wie vor fest!)

und wir können mit Satz 10 folgern, dass für $|x| \leq \pi$:

$$\cos(zx) = \frac{z\sin(\pi z)}{\pi} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1}{z^2-k^2} e^{ikx}$$

$$= \frac{z}{\pi}\sin(\pi z)\left(\frac{1}{z^2} + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2-k^2}\cos(kx)\right)$$

Für $x = 0$: $\cos(zx) = 1 = \cos(kx)$ und also

$$\underline{\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2-k^2}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{PBZ für}\\ \operatorname{cosec}(\pi z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}\end{array}\right)$$

Für $x = \pi$: $\cos(kx) = (-1)^k$ und also

$$\underline{\pi z \cdot \cot(\pi z) = 1 + 2z^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-k^2}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{PBZ des}\\ \text{Cotangens}\end{array}\right)$$