Extrema mit Nebenbedingungen – weitere Beispiele

Bsp. 2: Abstände von gekrümmten Flächen(stücken) zu einem gegebenen Punkt x_0.

Gegeben sei eine stetig diff'bare Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein "Hyperflächenstück" $A := \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$, dargestellt als Nullstellengebilde der Funktion φ.
Zu berechnen ist der Abstand $\mathrm{dist}(x_0, A)$!

Wir wissen bereits: Da A abgeschlossen ist, und $\{x_0\}$ kompakt, existiert $x_{min} \in A$, für dass

$$\mathrm{dist}(x_0, A) = d(x_0, x_{min}) = |x_{min} - x_0|.$$

Um diesen Abstand zu bestimmen, ~~....~~ minimieren wir die Funktion

$$f(x) = |x - x_0|^2 \longleftarrow \text{einfacher zu rechnen!}$$

unter der Nebenbedingung $x \in A$, d.h. unter der NB

$$\varphi(x) = 0.$$

Nach dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren existiert eine reelle Zahl λ, so daß

$$\nabla(f - \lambda\varphi)(x) = 0,$$

für $f(x) = |x - x_0|^2$ also:

$$2(x - x_0) = \lambda \nabla \varphi(x) \qquad \text{(Notwendige Bedingung)}$$

Für den Punkt x_{min}, in dem der Abstand der Hyperfläche A zu x_0 minimal wird, gilt also

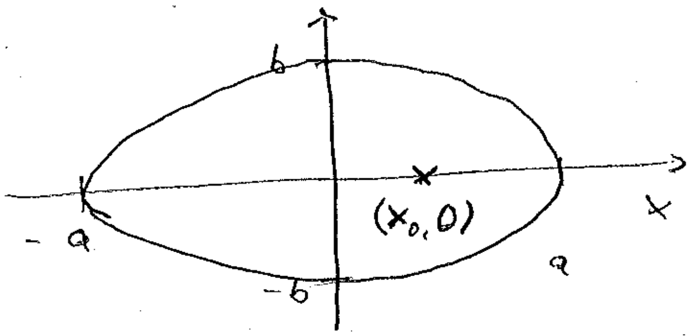
$$x_{min} - x_0 \parallel \nabla \varphi(x_{min})$$

Nun ist $A = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) = 0\} = N_\varphi(0)$ eine Niveaumenge von φ, und wir haben festgestellt, daß der Gradient $\nabla \varphi(x_0)$ orthogonal ist zu jeder Tangente an A im Punkt x_0, somit zur Tangential(hyper-)ebene. Wir können also – etwas ungenau – feststellen:

"Der kürzeste Abstand eines Punktes x_0 zu einer (glatten) Fläche ist immer der senkrechte" (i. S. v.: senkrecht zur Tangentialebene).

<u>Konkretisierung</u>: $A = \partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

sei der Rand einer Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b; der Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, 0)$ befinde sich auf der x-Achse.



Hier ist $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ und

$$\nabla\varphi(x,y) = 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right),$$

so dass die notwendige Bedingung lautet

$$(x - x_0, y) = \lambda\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right).$$

Berücksichtigen wir auch die NB, haben wir das folgende GLS. zu lösen:

$$x\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right) = x_0 \,; \quad y\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right) = 0 \,; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Fall: $y = 0 \implies x = \pm a$ liefert tatsächlich zwei kritische Stellen $P_{1,2} = (\pm a, 0)$

2. Fall: $y \neq 0 \implies 1 - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \to \lambda = b^2 \implies x\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = x_0$

$$\implies x\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = x_0 \implies x = \frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot x_0$$

$$\implies y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pm b\sqrt{1-\frac{a^2x_0^2}{(a^2-b^2)^2}},$$

was tatsächlich zwei weitere kritische Stellen liefert,

sofern $x_0^2 a^2 \leq (a^2-b^2)^2 \iff x_0^2 \leq \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2}$

$$\iff |x_0| \leq \frac{a^2-b^2}{a} \left(= \frac{c^2}{a}, \ c \text{ der Brennpunkt}\right).$$

In diesem Fall sind also auch

$$P_{3,4} = \left(\frac{a^2}{a^2-b^2}x_0, \pm b\sqrt{1-\frac{a^2x_0^2}{(a^2-b^2)^2}}\right)$$ kritisch.

Welcher dieser Punkte liefert nun den Abstand von $(x_0, 0)$ zu ∂E? Dazu nehmen wir o. E. $x_0 \geq 0$ an

$$\Rightarrow |P_1 - (x_0, 0)|^2 = (a - x_0)^2$$

Andererseits:

$$|P_{3,4} - (x_0, 0)|^2 = x_0^2 \left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - 1\right)^2 + b^2 \left(1 - \frac{a^2 x_0^2}{(a^2-b^2)^2}\right)$$

$$= x_0^2 \left(\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{(a^2-b^2)^2 - a^2 x_0^2}{(a^2-b^2)^2}\right)$$

$$= \frac{b^2}{(a^2-b^2)^2} \left(x_0^2 b^2 + (a^2-b^2)^2 - a^2 x_0^2\right)$$

liefert für $x_0 = 0$ das Min

$$= \frac{b^2}{a^2-b^2} (a^2 - b^2 - x_0^2) = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2-b^2} \underset{?}{\leq} (a - x_0)^2$$

$$? \Leftrightarrow \quad b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2-b^2} \leq a^2 - 2a x_0 + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a x_0 \leq a^2 - b^2 + x_0^2 \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 x_0 \leq \frac{a^2-b^2}{a} + \frac{a}{a^2-b^2} \cdot x_0^2 \quad \text{(gilt Young)}$$

<u>Ergebnis:</u>

$$\operatorname{dist}((x_0, 0), \partial E) = \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^2 - b^2 - x_0^2}, & \text{falls } |x_0| < \frac{a^2-b^2}{a} \\ |a - |x_0||, & \text{falls } |x_0| \geq \frac{a^2-b^2}{a}. \end{cases}$$

Bsp. 3 Abstände von Kurven im $\mathbb{R}^n$ zu einem Punkt (mehrere L-Multiplikatoren)

Eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^n$ sei gegeben als Durchschnitt von $n-1$ Hyperflächen: $C = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$, dabei

$$A_i = \{x \in \Omega : \varphi_i(x) = 0\}, \quad \varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

(Dann können wir C auch schreiben als $C = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$, so daß wir exakt die Formulierung des Satzes über die Lagrange-Multiplikatoren treffen.)

<u>Konkret:</u> Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zylinder

$A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ und

$A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4\}$

Deren Durchschnitt $C = A_1 \cap A_2$ ist dann eine Kurve im $\mathbb{R}^3$. ~~[illegible]~~

Wir fragen für einen festen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nach $\operatorname{dist}(x_0, C)$. Wieder ist C abgeschlossen und $\{x_0\}$ kompakt, also existiert $x_{min} \in C$, so daß

$$\operatorname{dist}(x_0, C) = d(x_0, x_{min})$$

Eine notwendige Bedingung zum Auffinden von x_{min} liefert wieder der Satz über die Lagrange-Multiplikatoren. Wir suchen nach einem Minimum der Fkt.

$f(x) = |x - x_0|^2$ unter den NBen

$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-1}(x) = 0$, also muß

$$(*) \quad \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \nabla \varphi_i(x) = 2(x - x_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \nabla \varphi_i(x) \overset{!}{=} 0$$

sein ($n + n-1$ Gleichgen für ebensoviele Unbekannte, nämlich $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$).

Kommen wir zu den beiden Zylindern zurück und bestimmen dist$(0, C)$!

$$\nabla \varphi_1(x,y,z) = 2(x, y, 0), \quad \nabla \varphi_2(x,y,z) = 2(0,y,z)$$

und $(*)$ lautet

$$(x,y,z) - \lambda_1(x,y,0) - \lambda_2(0,y,z) = (0,0,0), \text{ also}$$

$$(1-\lambda_1)x \overset{!}{=} (1-\lambda_1-\lambda_2)y \overset{!}{=} (1-\lambda_2)z \overset{!}{=} 0$$

ferner $\quad x^2 + y^2 \overset{!}{=} 1 \qquad y^2 + z^2 \overset{!}{=} 4$

(1) $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 3$, ferner können noch $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 0$ gewählt werden

(2) $y = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ und $z^2 = 4$, wähle $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

(3) $z = 0 \Rightarrow y^2 = 4$ $\lightning$

Wählen wir $x \neq 0$ und $y \neq 0$ und $z \neq 0$ müssen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und auch $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sein $\lightning$

Insgesamt $2 \times 4 = 8$ kritische Stellen, die ersten vier liefern ein Minimum: dist$((0,0,0), C) = 2$

Bsp. 4: Abstand zweier Hyperflächen

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) = 0\}, \quad F_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : \varphi_2(y) = 0\}$$

und fragen nach $\operatorname{dist}(F_1, F_2)$. $(\varphi_{1,2} \in C^1!)$

Wir wissen: Ist eine dieser Flächen beschränkt, gibt es $x_0 \in F_1$ und $y_0 \in F_2$, so daß

$$\operatorname{dist}(F_1, F_2) = d(x_0, y_0) = |x_0 - y_0|$$

Damit geht unsere Abstandsberechnung in die Lösung des folgenden Extremwertaufgabe über:

Minimiere $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto |x-y|^2$

unter den NBen $\varphi_1(x) = 0$ und $\varphi_2(y) = 0$.

Notwendige Bedingung nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren

$$0 = \nabla F(x,y) - \lambda_1 \nabla \varphi_1(x) - \lambda_2 \nabla \varphi_2(y) \qquad (\nabla = (\nabla_x, \nabla_y))$$

$$= 2((x,0) - (0,y)) - \lambda_1(\nabla_x \varphi_1(x), 0) - \lambda_2(0, \nabla_y \varphi_2(y))$$

Also muß $\left.\begin{array}{l} 2(x-y) = \lambda_1 \nabla_x \varphi_1(x) \\ \text{und } 2(y-x) = \lambda_2 \nabla_y \varphi_2(y) \end{array}\right\} 2 \times n$ Gleichungen

und die beiden NBen erfüllt sein.

konkrete Beispiele hierzu werden schnell sehr aufwändig, eines werden wir in den Übungen diskutieren.