3. Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Allgemein heißt eine Gleichung der Form

$$F\left(x_1,\dots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^k y}{\partial x_1^k},\dots\frac{\partial^k y}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}},\dots\frac{\partial^k y}{\partial x_n^k}\right)=0$$

eine Differenzialgleichung der Ordnung $k \geq 1$ $(k_1+\dots+k_n=k)$.

Hierbei ist

$x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ die unabhängige Variable

und

$y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$

die gesuchte Lösung.

Ist F als Funktion von y und allen Ableitungen von y linear, so nennen die Differenzialgleichung (in Zukunft kurz: Dgl.) linear.

Für $n>1$ sprechen wir von einer partiellen Dgl., da sie partielle Ableitungen enthält. Z.B. ist die bereits angesprochene Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x)=f(x)\qquad\left(\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

eine lineare, partielle Dgl. 2. Ordnung.

$n=1$: gewöhnliche Dgln., in der Regel aufgelöst nach der höchsten auftretenden Ableitung, also

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

(Explizite gewöhnliche Dgl. k-ter Ordnung.) Die gesuchte Lösung ist hier eine k-mal stetig d'bare Funktion $y : \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$.

Ggf. betrachtet man auch Systeme derartiger Gleichungen, die in derselben Weise notiert werden. In diesem Fall sind y und f vektorwertig.

<u>Herkunft:</u> Natur- und Sozialwissenschaften, z. B.:

- Wachstumsmodelle in Biologie und Ökonomie,
- In der Physik: Bewegungsgleichungen; Beschreibung von Schwingungsvorgängen, Wellenausbreitung etc.

<u>Zweck:</u> Beschreibung und Vorhersage deterministischer Prozesse

Modell bzw. Naturgesetz in Form einer Dgl.	+	Exakte Kenntnis des Anfangszustands eines Systems z. Zt x_0 (bzw. t_0)

$\leadsto$ erlaubt Prognose des Verhaltens des Systems in der Zukunft (idealerweise für alle Zeiten $x > x_0$ bzw. $t > t_0$).

Das Kardinalbeispiel aus dem Bereich der gewöhnlichen Dgln. ist die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\, y''(x) = F(x, y, y') \qquad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$

bzw. in Newtonscher Schreibweise

$$m\, \ddot{x}(t) = F(t, x, \dot{x}) \qquad x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1$$

Masse (m) · Beschleunigung = Kraft (F)

Sind alle Kräfte bekannt und ebenso Ort und Geschwindigkeit (≙ Impuls) zu einem bestimmten Zeitpunkt, so läßt sich im Idealfall eine Bewegung für alle Zeiten vorhersagen.

Die Forderung nach Vorhersagbarkeit führt auf das Konzept des "<u>wohlgestellten Problems</u>" nach <u>Hadamard</u>: Ein Problem bestehend aus einer Dgl. und Zusatzbedingungen (Anfangs-, ggf. auch Randwerte werden vorgegeben) heißt wohlgestellt, falls

1. Eine Lösung existiert,
2. diese in einer passenden Klasse von Funktionen eindeutig bestimmt ist, und
3. stetig von den Anfangs-/Randwerten ("Daten") und ggf. weiteren Parametern abhängt.

3.1 Elementare Lösungsmethoden

Hier beschränken wir uns im wesentlichen auf eine einzelne Gleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$. Unter einer Lösung verstehen wir dann eine Funktion

$$\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}), \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall},$$

für die $G_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\} \subset \Omega$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $\forall x \in I$. Einen wichtigen Spezialfall bilden die sogenannten separierbaren Dgln., die durch Integration gelöst werden können:

Def.: Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $g \in C(J, \mathbb{R})$. Dann wird die Dgl.

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x))$$

als <u>separierbare Dgl.</u> oder auch als <u>Dgl. mit getrennten Variablen</u> bezeichnet.

<u>Bem.</u>: Ist $g(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$, so ist die konstante Funktion $\varphi(x) = y_0$ eine Lösung. Abgesehen von diesem Trivialfall gilt der folgende

Satz 1: Es sei $f \in C(I,\mathbb{R})$ und $g \in C(J,\mathbb{R})$ mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Zu $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ existiert dann ein offenes Intervall $I_0 \subset I$, so daß das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung $\varphi \in C^1(I_0,\mathbb{R})$ besitzt. Mit

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{und} \qquad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$$

ist diese Lösung gegeben durch

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x)).$$

Bew.: (1) Da g stetig und $\neq 0$ ist, existiert $\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$ für jedes $y \in J$. Ferner wechselt g nicht das Vorzeichen, so dass G streng monoton ist. Daher existiert G^{-1} und ist stetig d'bar.

(2) Existenz: Dgl.

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} G(\varphi(x)) = \frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)).$$

AWP: Es ist $F(x_0) = 0 = G(y_0)$, also

$$y_0 = G^{-1}(F(x_0)) = \varphi(x_0).$$

(3) Eindeutigkeit: Aus

$$\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x)) \quad \text{und} \quad \varphi(x_0) = y_0$$

folgt mit der Substitutionsregel

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{ds}{g(s)},$$

also $F(x) = G(\varphi(x))$, d.h. $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$. $\square$

Bem.: Der Eindeutigkeitsteil des Beweises enthält das eigentliche Lösungsverfahren, was als Separation oder Trennung der Variablen bezeichnet wird. Praktisch wird man folgende Rechnung durchführen

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{dy}{g(y)}\Big|_{y=y(x)} - C$$

mit Stammfunktionen F und G also

$$F(x) = G(y(x)) - C \Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x)+C)$$

Abschließend bestimmt man die Integrationskonstante C aus der Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$.

Hinweis: Eine Lösung, die die Integrationskonstante C als freien Parameter enthält, bezeichnet man als allgemeine Lösung.

Bsp. 1 : $y' = e^{-y}\cos(x)$ $\qquad y(0) = y_0$

$\Rightarrow e^y \cdot y' = \cos(x)$

$\Rightarrow \sin(x) = \int \cos(x)\,dx = \int e^{y(x)} y'(x)\,dx = \int e^y dy = e^y + C$

$\Rightarrow y(x) = \ln(\sin(x) - C)$

Anfangsbed.: $y_0 = y(0) = \ln(-C) \Rightarrow C = -e^{y_0}$

$\Rightarrow y(x) = \ln(\sin(x) + e^{y_0})$

Diskussion: Das Existenzintervall hängt wesentlich vom Anfangswert ab.

(i) $y_0 > 0 \Rightarrow \sin(x) + e^{y_0} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Lösung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (<u>globale</u> Lösung)

(ii) $y_0 = 0 \Rightarrow$ Lösung existiert auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

(iii) $y_0 < 0$ Lösungsintervall schrumpft weiter

} nur <u>lokale</u> Lösungen

Bsp. 2 : Homogene Differenzialgleichung $y' = f(\frac{y}{x})$

Diese kann durch die Substitution $z = \frac{y}{x}$ auf eine separierbare zurückgeführt werden:

$$f(z) = y' = \frac{d}{dx}(xz) = z + x \cdot z'$$

Für z erhalten wir also die separierbare Dgl

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

Konkretisierung: $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = y_0$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{1}{x}(1+z^2) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(z) = \ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad z(x) = \tan(\ln(x) + C)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = x \cdot \tan(\ln(x) + C)$$

Anfangsbed. $y_0 = y(1) = \tan C$, also $C = \arctan(y_0)$

Auch hier erhalten wir nur lokale Lösungen.

Die Methode der Variablentrennung wird auch verwendet, um das AWP für lineare Dgln. erster Ordnung zu lösen.

Def.: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q \in C(I, \mathbb{R})$. Dann heißt die Dgl.

$$y' = py + q \qquad (\text{ausführlich: } y'(x) = p(x)y(x) + q(x))$$

eine <u>lineare Dgl. 1. Ordnung</u>. Sie heißt <u>homogen</u>, falls $q \equiv 0$ ist, andernfalls <u>inhomogen</u>.

Bezüglich des Anfangswertproblems für diese Gleichung gilt der folgende Satz:

Satz 2: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $p, q \in C(I, \mathbb{R})$. Dann besitzt das AWP $y(x_0) = y_0$ für die Dgl.

$$y' = py + q$$

die eindeutige Lösung $y(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right)$, wobei $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$ die Lösung der homogenen Gleichung $y' = py$ mit $\varphi(x_0) = 1$ ist.

Herleitung: (1) Die Lösung der homogenen Gleichung gewinnt man durch Separation:

$$y' = py \implies \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

$$\implies \ln\left(y(x)/y(x_0)\right) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

$$\implies y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$$

Für $y_0 = 1$ erhält man $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$.

(2) Für die inhomogene Gleichung $y' = py + q$ $(q \neq 0)$ macht man einen Produktansatz

$$y(x) = c(x)\,\varphi(x) = c(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$$

(sog. „Methode der Variation der Konstanten", geht zurück auf Lagrange). Es folgt

$$y'(x) = c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x)$$

$$= \underbrace{c(x)\cdot p(x)\cdot\varphi(x)}_{=p(x)\cdot y(x)} + c'(x)\cdot\varphi(x) \overset{!}{=} p(x)y(x) + q(x)$$

Wir erhalten somit eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn

$$c'(x) = \frac{q(x)}{\varphi(x)}, \text{ d.h. wenn } c(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Also ist mit

$$y_p(x) := \varphi(x)\cdot\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt$$

eine spezielle (sogenannte partikuläre) Lösung gewonnen, die das AWP $y(x_0) = 0$ löst.

Addition der Teilergebnisse aus (1) und (2) führt jetzt auf die Lösung wie im Satz behauptet.

__Beweis des Satzes:__ (1) Existenz: $y(x) := \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right)$ mit $\varphi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$.

Dann ist $\varphi(x_0) = \exp(0) = 1$ und somit $y(x_0) = y_0$.

Ferner: $y'(x) = \varphi'(x)\cdot\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) + \varphi(x)\cdot\frac{q(x)}{\varphi(x)}$

$$= p(x)\cdot\varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) + q(x) = p(x)y(x) + q(x).$$

__Also__: Anfangsbedingung und Dgl. sind erfüllt.

(2) Eindeutigkeit: Sei $z \in C^1(I,\mathbb{R})$ eine weitere Lösung und $w = y - z$. Dann folgt

$$w(x_0) = y(x_0) - z(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

und

$$w'(x) = y'(x) - z'(x) = p(x)\,(y(x) - z(x)) + q(x) - q(x)$$

$$= p(x)\,w(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\,\frac{w(x)}{\varphi(x)} = \frac{w'(x)}{\varphi(x)} - \frac{w(x)}{\varphi(x)^2}\,\varphi'(x) = \frac{p(x)\,w(x)}{\varphi(x)} - \frac{w(x)p(x)}{\varphi(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w(x)}{\varphi(x)} \text{ ist konst. Wg. } w(x_0) = 0: \ \frac{w(x)}{\varphi(x)} = 0 \ \forall x \in I$$

$$\Rightarrow w(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = z(x) \ \forall x \in I. \qquad \square$$

<u>Folgerungen aus Satz ~~1~~2:</u>

(1) Das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ für die lineare Dgl. 1. Ordnung ist wohlgestellt.

Bew.: Existenz und Eindeutigkeit – in $C^1(I,\mathbb{R})$ – sind Gegenstand des Satzes. Der Lösungsoperator

$$S: \mathbb{R} \to C^1(I,\mathbb{R}),\ y_0 \mapsto \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right)$$

(Daten auf Lösungen) ist explizit gegeben. Für ein beschränktes Intervall I betrachten wir $C^1(I,\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$$
$$=: \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Dann ist

$$\| Sy_0 - Sz_0 \|_1 = \| \varphi \cdot (y_0 - z_0) \|_1 = |y_0 - z_0| \, \|\varphi\|_1 ,$$

wobei $\|\varphi\|_1 = \sup \{ \exp(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt) : x \in I \}$

$$+ \sup \{ |p(x)| \exp(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt) : x \in I \} < \infty$$

Also ist $S : \mathbb{R} \to C^1(I, \mathbb{R})$ lipschitzstetig.

Ist I unbeschränkt, statten wir $C^1(I,\mathbb{R})$ mit einer gewichteten Norm aus. Dazu wählen wir eine Gewichtsfunktion $w > 0$, für die

$$\sup \{ w(x) \cdot \varphi(x) : x \in I \} < \infty \quad \text{sowie}$$

$$\sup \{ w(x) |p(x)| \varphi(x) : x \in I \} < \infty$$

ist und setzen $\|f\|_{1,w} = \|w \cdot f\|_\infty + \|w f'\|_\infty$.

Dann ist $S : \mathbb{R} \to (C^1(I,\mathbb{R}), \| \ \|_{1,w})$ ebenfalls Lipschitz-stetig.

(2) Struktur des Lösungsraumes S (= Menge aller Lösungen der Dgl.)

Im Fall der homogenen Gleichung handelt es sich um einen eindimensionalen Untervektorraum von $C^1(I,\mathbb{R})$. In der Tat ist

$$S_h : \mathbb{R} \to C^1(I,\mathbb{R}), \; y_0 \mapsto S_h y_0 := \varphi \cdot y_0$$

linear und injektiv ($\ker S_h = \{0\}$!) und daher

$$S_h : \mathbb{R} \to S_h(\mathbb{R}) \subset C^1(I, \mathbb{R})$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Im Fall der inhomogenen Gleichung ist jede Lösung der Gestalt

$$y = \varphi \cdot y_0 + y_p$$

mit $\varphi \cdot y_0 \in S_h(\mathbb{R})$ und einer speziellen Lösung y_p der inhomogenen Gleichung. Die Gesamtheit aller Lösungen bildet hier also einen eindimensionalen affinen Teilraum von $C^1(I, \mathbb{R})$.

(Ähnliches gilt auch für Systeme linearer Gleichungen 1. Ordnung und für lineare Dgln. höherer Ordnung. Die Lösungsräume haben dann allerdings eine größere Dimension.)

Bsp. 3: Wir lösen das AWP $y(0) = y_0$ für die inhomogene lineare Dgl. $\quad y' = \cos(x) \cdot y + \sin(x)\cos(x)$

Hierfür ist $\quad \varphi(x) = \exp \int_0^x \cos(t)\,dt = \exp(\sin(x))$

und $\quad y_p(x) = \varphi(x) \int_0^x \cos(t)\sin(t)\exp(-\sin(t))\,dt$

mit der Substitution $z = \sin(t)$ ($\Rightarrow$ "$dz = \cos(t)\,dt$")

ergibt sich

$$\int_0^x \cos(t)\sin(t)\exp(-\sin(t))\,dt$$

$$= \int_0^{\sin(x)} z\exp(-z)\,dz \quad =: (*), \text{ wobei}$$

$$\int z\exp(-z)\,dz = -z\exp(-z) + \int \exp(-z)\,dz$$

$$= -(z+1)\exp(-z) \qquad (\text{part. Int.}),$$

also

$$(*) = -(\sin(x)+1)\exp(-\sin(x)) + 1$$

und daher

$$y_p(x) = \exp(\sin(x)) - \sin(x) - 1$$

Ergf.: $y(x) = \varphi(x)\cdot y_0 + y_p(x) = \underline{\underline{(y_0+1)\exp(\sin(x)) - \sin(x) - 1}}$

Verwandt mit der linearen Dgl. 1. Ordnung ist die

Bernoullische Dgl. $\quad y' = py + qy^{\alpha} \qquad (B)$,

wobei $p, q \in C(I,\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Hierfür gilt

<u>Lemma 1</u>: $y \in C^1(I,\mathbb{R})$ ist genau dann eine positive Lösung von (B), wenn $z := y^{1-\alpha} \in C^1(I,\mathbb{R})$ eine positive Lösung der linearen Gleichung

$$z' = (1-\alpha)(pz+q)$$

ist.

Bew.: (1) Es sei $y' = py + qy^\alpha$ und $z = y^{1-\alpha}$.

$$\Rightarrow \quad z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} \cdot y' = (1-\alpha)(py^{1-\alpha} + q) = (1-\alpha)(pz+q)$$

(2) Umgekehrt sei $z' = (1-\alpha)(pz+q)$ und $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot z' = p \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + q \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$= py + qy^\alpha . \qquad \square$$

<u>Anwendung:</u> Ein einfaches Modell für das Wachstum von Populationen: $N' = gN - sN^2$ mit

$$\left.\begin{array}{ll} N = N(x) & : \text{Anzahl der Individuen} \\ g & : \text{konstante Geburtenrate} \\ sN & : \text{linear wachsende Sterberate} \end{array}\right\} \quad N, g, s > 0$$

linearer Term $g \cdot N$ – dominant für $N \ll \frac{g}{s}$. In diesem Regime ist das Wachstum(*) proportional zur Bevölkerungszahl. In diesem Bereich ist mit einem im wesentlichen exponentiellen Wachstum zu rechnen.

quadratischer Korrekturterm $-sN^2$: Für $sN \to g$ ergibt sich $N' \to 0$. Das Wachstum kommt zum Erliegen, wenn die Grenzpopulation $N_\infty := \frac{g}{s}$ erreicht wird. (Ein möglicher Grund hierfür ist z.B. begrenzte Nahrungsmenge.)

(*) annähernd

Es liegt eine Bernoullische Dgl. mit $\alpha = 2$ vor. Zu deren Lösung setzt man gemäß Lemma 1

$$z := \frac{1}{N}$$

und erhält als lineare Dgl. für z $(1-\alpha = -1,\ p = g,\ q = s$

$$z' = -g z + s \,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$z_h(x) = C \cdot e^{-gx},$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist aufgrund der Vorüberlegung leicht zu erraten:

$$z_p(x) = \frac{1}{N_\infty} = \frac{s}{g}$$

Es folgt: $z(x) = \frac{s}{g} - C \cdot e^{-gx}$ und damit

$$N(x) = \frac{1}{\frac{s}{g} - C e^{-gx}} = \frac{e^{gx}}{\frac{s}{g} e^{gx} - C},$$

was tatsächlich

$$\lim_{x \to \pm\infty} N(x) = \begin{cases} \frac{g}{s} = N_\infty & \text{für } + \\ 0 & \text{für } - \end{cases}$$

bedeutet.

(Lit.: Alternative Wachstumsmodelle in: Walter, gew. Dgln, Kap II, § 2;
Kaballo, Band II, Abschnitt 31; → kein geeignetes Modell für die Weltbevölkerung)