3.2 Systeme linearer Dglen. 1. Ordnung

Hier betrachten wir das AWP $y_i(x_0) = (y_0)_i$, $1 \le i \le n$, für Systeme der Form

$$y_1' = p_{11}(x) y_1 + p_{12}(x) y_2 + \dots + p_{1n}(x) y_n + q_1(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = p_{n1}(x) y_1 + \dots \qquad p_{nn}(x) y_n + q_n(x),$$

mit $p_{ij} \in C(I, \mathbb{K})$, $q_i \in C(I, \mathbb{K})$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$.

Fassen wir y_i und q_i zu Vektoren $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ und $Q = (q_1, \dots, q_n)^T$ zusammen und p_{ij} zu einer Matrix $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, so können wir das Problem kürzer notieren als

$$y' = P(x) y + Q(x), \qquad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{K}^n,$$

wobei jetzt $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ und $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$.
Für die gesuchte Lösung fordern wir $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$.
Ganz analog zum Fall einer einzelnen Gleichung nennen wir ein solches lineares System homogen, falls $Q \equiv 0$, sonst inhomogen.

Was können wir über die Struktur des Lösungsraumes aussagen?

(1) Für das homogene System $y' = P(x)y$ gilt: sind y, z Lösungen, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $w = \lambda y + \mu z$, so ist

$$w' = \lambda y' + \mu z' = \lambda P y + \mu P z = P(\lambda y + \mu z) = Pw,$$

d.h. auch w ist eine Lösung des Dgl. Systems. Der Lösungsraum ist also hier ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

(2) Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass es zu gegebenen $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$, $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ von $y' = P(x)y + Q(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ gibt. Wir erhalten also einen Lösungsoperator

$$S : \mathbb{K}^n \longrightarrow C^1(I, \mathbb{K}^n), \quad y_0 \longmapsto S y_0,$$

definiert durch: $S y_0 =$ eindeutig bestimmte Lösung von $y' = Py + Q$.

Falls $Q \equiv 0$ ist, ist S linear (sind y bzw z Lösungen mit $y(x_0) = y_0$ und $z(x_0) = z_0$, so erhalten wir mit $w = \lambda y + \mu z$ eine Lösung mit dem Anfangswert

$$w(x_0) = \lambda y(x_0) + \mu z(x_0) = \lambda y_0 + \mu z_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit haben wir also

$$S(\lambda y_0 + \mu z_0) = w = \lambda y + \mu z = \lambda S(y_0) + \mu S(z_0).)$$

und injektiv, denn $Sy_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$, also $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$.

Damit ist

$$S : \mathbb{K}^n \longrightarrow S(\mathbb{K}^n)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Insbesondere ist also $S(\mathbb{K}^n)$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

(3) Für das inhomogene System $y' = P(x)y + Q$ gilt: Sind zwei Lösungen $y_{1,2}$ gegeben, so ist die Differenz $y = y_1 - y_2$ eine Lösung des homogenen Systems $y' = P(x)y$. Die Gesamtheit aller Lösungen des inhomogenen Systems bildet also einen n-dimensionalen affinen Teilraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Def.: Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ linear unabhängige Lösungen von $y' = Py$. Dann heißt die Matrixwertige Funktion

$$\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$$

ein Lösungsfundamentalsystem (LFS) von $y' = Py$.

Bem.: ϕ ist nicht eindeutig bestimmt.

Lemma 1: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$. $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ sei ein System von Lösungen von $y' = Py$. Dann gelten:

(1) Für jedes $c \in \mathbb{K}^n$ wird durch $y(x) = \Phi(x) \cdot c$ eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ von $y' = Py$ definiert.

(2) Für jede Matrix $C \in M_n(\mathbb{K})$ wird durch $Y(x) = \Phi(x) C$ eine Lösung $Y \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ der "Matrix-Differenzialgleichung $Y' = PY$ definiert.

Bew.: (1) ist klar für $c = e_k = (\delta_{ik})_{1 \le i \le n}$, denn es ist $\Phi e_k = \varphi_k$. Da das Dgl. System linear ist, gilt die Aussage auch für ein beliebiges $c = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ mit $c_k \in \mathbb{K}$.

(2) Nach (1) löst jede Spalte von Y das Dgl.-System $y' = Py$, damit die Matrix die Matrix-Dgl. □

Setzen wir zusätzlich voraus, dass Φ ein Lösungsfundamentalsystem ist, können wir sogar alle Lösungen von $y' = Py$ bzw. von $Y' = PY$ in der o.g. Weise darstellen.

Lemma 2: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$ und $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$. $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ sei ein LFS von $y' = Py$. Dann gelten:

(1) Die Matrix $\Phi(x)$ ist für jedes $x \in I$ invertierbar.

(2) Die Gesamtheit aller Lösungen Y von $Y' = PY$ ist gegeben durch $\{ \Phi C : C \in M_n(\mathbb{K}) \}$.

(3) Der Lösungsraum von $y' = Py$ ist gegeben durch $\{ \Phi c : c \in \mathbb{K}^n \}$.

(4) Ist $\Phi(x_0) = E_n$, so ist die Lösung des AWPs

$$y' = Py \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

durch $y(x) = \Phi(x) y_0$ gegeben.

Bew.: (1) Ist $\Phi(x_*)$ nicht invertierbar für ein $x_* \in I$, so sind $\varphi_1(x_*), \dots, \varphi_n(x_*)$ nicht linear unabhängig. Also existieren $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, so daß $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x_*) = 0$. Wir setzen $y(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x)$. Dann löst y das

AWP $\quad y'(x) = P(x) y(x) \qquad y(x_*) = 0.$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes gilt dann $y(x) = 0 \;\forall x \in I$, also $y = 0 \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$. Das bedeutet aber, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ als Vektoren in $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ nicht linear unabhängig sind, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Sei $\Phi_0 \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ eine Lösung von $Y' = PY$.

Wir setzen $C(x) = \Phi^{-1}(x)\,\Phi_0(x)$ (möglich nach (1))

$$\Rightarrow \quad \Phi_0(x) = \Phi(x)\cdot C(x) \Rightarrow \Phi_0'(x) = \Phi'(x)C(x) + \Phi(x)\cdot C'(x).$$

$$\Rightarrow \quad P\Phi_0(x) = P\underbrace{\Phi(x)C(x)}_{=\Phi_0(x)} + \Phi(x)\cdot C'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x)\cdot C'(x) = 0 \underset{\Phi(x) \text{ invertierbar}}{\Longrightarrow} C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = \text{konstant}.$$

(3) analog, (4) folgt aus Teil (2) von Lemma 1. $\square$

Def.: Für ein System $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ von Lösungen des Dgl.-Systems $y' = Py$ heißt

$$W_\Phi(x) := \det(\Phi(x))$$

die <u>Wronski-Determinante</u> des Systems Φ.

Nach Lemma 2 (1) gilt $W_\Phi(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, wenn Φ ein LFS ist, was uns ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ liefert. Dieses Kriterium können wir noch etwas verfeinern.

Lemma 3: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ und $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein System von Lösungen von $y' = Py$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Φ ist ein LFS,

(2) $W_\Phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

(3) $\exists\, x_0 \in I$, so daß $W_\Phi(x_0) \neq 0$.

Bew.: $(1) \Rightarrow (2)$: Vorbem., $(2) \Rightarrow (3)$ trivial. Also ist nur noch die Implikation $(3) \Rightarrow (1)$ zu zeigen.

Sei also $W_\Phi(x_0) \neq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i = 0$ in $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.
Dann folgt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ (in $\mathbb{K}^n$) $\forall x \in I$, insbesondere $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x_0) = 0$. $W_\Phi(x_0) = \det \Phi(x_0) \neq 0$ bedeutet nun gerade, daß $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{K}^n$ sind, woraus $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ folgt. Das heißt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind linear unabhängig in $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ und damit Φ ein LFS. □

Die Wronski-Determinante eines Lösungssystems Φ ist also entweder überall gleich Null oder nirgends. Dies kann man präzisieren zu:

Satz D: Es sei $\Phi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ eine Lösung der Matrix-Dgl. $Y' = PY$. Dann gilt für ihre Wronski-determinante

$$W_\Phi(x) = W_\Phi(x_0) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \underbrace{\mathrm{Sp}(P(t))}_{= \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(t)} dt \Big).$$

Bew.: Koballo II, Satz 36.6.

Für $n \geq 2$ gibt es kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung von Lösungsfundamentalsystemen. Daher sollen einige Spezialfälle diskutiert werden, die man systematisch behandeln kann.

<u>Fall</u> 1: Die Matrix P hat Diagonalgestalt, d.h. wir haben $p_{ij} \equiv 0$ für $i \neq j$. In diesem Fall nennt man das System $y' = Py$ <u>entkoppelt</u>, denn es reduziert sich auf die n voneinander unabhängigen Gleichungen

$$y_i' = p_{ii} y_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit den Lösungen $\varphi_i(x) = \exp(\int p_{ii}(x)dx)$. Man erhält ein LFS in Diagonalform:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_i \text{ wie oben.}$$

Ist das AWP $y(x_0) = y_0$ zu lösen, wählt man meist $y_i(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} p_{ii}(t)dt)$ und als LFS

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n(x) \end{pmatrix}$$

mit $Y(x_0) = E_n$, so daß die Lösung y von $y' = Py$, $y(x_0) = y_0$ gegeben ist durch $y(x) = Y(x) \cdot y_0$.

Fall 2: Die Matrix $P(x)$ ist für alle $x \in I$ eine rechte obere Dreiecksmatrix, wir haben also $p_{ij} \equiv 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i > j$. Im Hinblick auf die bekannte Tatsache, daß die Inverse einer regulären rechten oberen Dreiecksmatrix wieder eine solche Dreiecksmatrix ist, versuchen wir, ein LFS Φ von $y' = Py$ in ebendieser Gestalt zu bestimmen. Gehen wir also mit dem Ansatz

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ 0 & \varphi_{22}(x) \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

in die Matrix-Dgl. $Y' = PY$ ein, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ & \varphi_{22} \cdots & \varphi_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & \varphi_{nn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

was den Differenzialgleichungen

$$\varphi_{ik}' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \varphi_{jk}$$

für $i \leq k$ entspricht. Nun ist $p_{ij} \neq 0$ nur für $i \leq j$ und $\varphi_{jk} \neq 0$ nur für $j \leq k$, sodaß sich diese Summe reduziert auf

$$\varphi_{ik}' = \sum_{j=i}^{k} p_{ij} \varphi_{jk} .$$

Wählen wir jetzt die richtige Reihenfolge, können wir diese Gleichungen systematisch lösen. Für die Diagonalelemente haben wir eine homogene lineare Dgl. 1. Ordnung:

$$\varphi_{ii}' = p_{ii}\varphi_{ii}$$

mit der Lösung $\varphi_{ii}(x) = \exp\left(\int p_{ii}(x)\,dx\right)$ (enthält in dieser Schreibweise eine noch wählbare multiplikative Konstante $c_{ii} > 0$!). Dann gehen wir über zur ersten oberen Nebendiagonalen, also zu den Komponenten $\varphi_{i,i+1}$ des zu bestimmenden LFS: hierfür haben wir die Dgl.

$$\varphi_{i,i+1}' = p_{ii}\varphi_{i,i+1} + p_{i,i+1}\varphi_{i+1,i+1},$$

wobei wir $\varphi_{i+1,i+1}(x) = \exp\left(\int p_{i+1,i+1}(x)\,dx\right)$ bereits bestimmt haben. Also liegt eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung vor, die wir ebenfalls lösen können durch

$$\varphi_{i,i+1}(x) = \varphi_{ii}(x) + \varphi_{ii}(x)\cdot\int p_{i,i+1}(x)\,\frac{\varphi_{i+1,i+1}(x)}{\varphi_{ii}(x)}\,dx$$

Nun fahren wir fort mit den Einträgen der 2., 3. usw. oberen Nebendiagonalen des LFS Φ, also mit $\Phi_{i,i+2}, \Phi_{i,i+3}$ usw. Sind dann alle φ_{ij} für $1 \le i \le n$ und $i \le j \le i+\ell-1$ bestimmt, können wir die Gleichung für $\varphi_{i,i+\ell}$ ebenfalls lösen, denn auch dies ist mit (siehe oben $k = i+l$ ein)

$$\varphi_{i,i+l}' = p_{ii}\varphi_{i,i+l} + \sum_{j=i+1}^{i+l} p_{ij}\varphi_{j,i+l}$$

welche eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung.

(Wir haben $\varphi_{j,i+l}$ bekannt für $j \leq i+l \leq j+l-1$,

also für $i+1 \leq j \leq i+l$, damit ist die gesamte

Summe $\sum_{j=i+1}^{i+l} \dots$ bekannt bzw. bereits bestimmt!)

Die Lösung ist gegeben durch

$$\varphi_{i,i+l}(x) = \varphi_{ii}(x) + \varphi_{ii}(x) \sum_{j=i+1}^{i+l} \int p_{ij}(x) \frac{\varphi_{j,i+l}(x)}{\varphi_{ii}(x)}\, dx$$

Durch passende Wahl der Integrationsgrenzen können

wir so auch ein LFS $Y = (y_{ij})$ erhalten mit $Y(x_0) = E_n$.

Dazu wählen wir

$$y_{ii}(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_{ii}(t)\,dt\right) \qquad (\Rightarrow y_{ii}(x_0) = \exp(0) = 1)$$

und, für $l \geq 1$,

$$y_{i,i+l}(x) = y_{ii}(x) \cdot \sum_{j=i+1}^{i+l} \int_{x_0}^{x} p_{ij}(t) \frac{y_{j,i+l}(t)}{y_{ii}(t)}\, dt$$

$(\Rightarrow y_{i,i+l}(x_0) = 0$ für $l \geq 1.)$

Bsp.: Wir bestimmen eine LFS Y von $y' = Py$ für

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-x} & 4 \\ 0 & 2 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Y(0) = E_3$$

Die Matrix-Dgl $Y' = PY$ lautet mit dem Ansatz von Y als rechter oberer Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & e^{-x} & 4 \\ 0 & 2 & xe^{-x} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix}$$

Die Dgln. für die Diagonalelemente y_{kk} lauten

$$y_{kk}' = k\, y_{kk}, \qquad k \in \{1, 2, 3\}$$

mit Lösungen $y_{kk}(x) = C_k e^{kx}$, wobei wir $C_k = 1$ wählen, um $y_{kk}(0) = 1$ zu erreichen. Die Dgln. für die Komponenten der ersten oberen Nebendiagonalen sind

$$y_{12}'(x) = y_{12}(x) + e^{-x} \underbrace{y_{22}(x)}_{= e^{2x}} = y_{12}(x) + e^{x}$$

und $$y_{23}'(x) = 2 y_{23}(x) + x \cdot e^{-x} \cdot \underbrace{y_{33}(x)}_{e^{3x}} = 2 y_{23}(x) + x \cdot e^{2x}$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$y_{12}(x) = C_{12} e^{x} + e^{x} \int \frac{e^{x}}{e^{x}}\, dx = \tilde{C}_{12} e^{x} + x e^{x} + \cancel{C_{12}}$$

$$y_{23}(x) = C_{23} e^{2x} + e^{2x} \int \frac{x \cdot e^{2x}}{e^{2x}}\, dx = \left(\tilde{C}_{23} + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}$$

Wir wählen $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{23} = 0$ um $y_{12}(0) = y_{23}(0) = 0$ zu erreichen,

also $\quad y_{12}(x) = x e^{x}$ und $y_{23}(x) = \frac{x^2}{2} e^{2x}$.

Schließlich ist noch y_{13} zu bestimmen als Lösung der Dgl.

$$y_{13}'(x) = y_{13}(x) + e^{-x} \cdot y_{23}(x) + 4 y_{33}(x)$$

$$= y_{13}(x) + \frac{x^2}{2} e^{x} + 4 e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y_{13}(x) = c_{13} \cdot e^{x} + e^{x} \cdot \int e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} e^{x} + 4 e^{3x} \right) dx$$

$$= c_{13} e^{x} + e^{x} \int \frac{x^2}{2} + 4 e^{2x} \, dx = \tilde{c}_{13} e^{x} + e^{x} \left(\frac{x^3}{6} + 2 e^{2x} \right)$$

Mit $\tilde{c}_{13} = -2$ ergibt sich

$$y_{13}(x) = \frac{x^3}{6} e^{x} + 2 (e^{3x} - e^{x}), \text{ so daß } y_{13}(0) = 0 \text{ ist.}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & x e^{x} & \frac{x^3}{6} e^{x} + 2(e^{3x} - e^{x}) \\ 0 & e^{2x} & \frac{x^2}{2} e^{2x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$$

als Lösung von $Y' = PY$ mit $Y(0) = E_3$.

Abschließende Bemerkung über Systeme in Dreiecksgestalt:

Das oben dargestellte Verfahren ist auch in der folgenden, etwas allgemeineren Situation anwendbar:

Gegeben seien $P, R \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ und eine feste, d.h. von x unabhängige, reguläre Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$, so daß folgendes gilt

(1) $A P(x) A^{-1} = R(x)$ für alle $x \in I$,

(2) $R(x)$ ist für jedes $x \in I$ eine rechte obere Dreiecksmatrix.

Dann kann man ein LFS $\Phi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ des DGL-Systems $y' = Py$ in folgender Weise gewinnen:

(i) Man multipliziert das System $y' = Py$ mit A und erhält $Ay' = APy = APA^{-1}Ay = RAy$, so daß sich für $z := Ay$ ($z' = Ay'$, da A fest!) das System

$$z' = Rz$$

in Dreiecksgestalt ergibt.

(ii) Man bestimmt ein LFS $\Psi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ von $z' = Rz$ nach dem oben dargestellten elementaren Verfahren.

(iii) $\Phi := A^{-1}\Psi$ ist dann ein LFS des ursprünglichen Systems $y' = Py$.

Bsp.: (1) $n=2$, $P(x)=\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ g(x) & f(x)\end{pmatrix}$, kurz $P=\begin{pmatrix} f & g \\ g & f\end{pmatrix}$

Man setzt $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, so dass $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

und erhält

$$APA^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & g \\ g & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f-g & f+g \\ g-f & f+g\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f-g-g+f & f+g-f-g \\ f-g+g-f & f+g+f+g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f-g & 0 \\ 0 & f+g\end{pmatrix}=:R,$$

wobei R in diesem Fall sogar Diagonalform hat. Sind F und G Stammfunktionen von f und g, so ist ein LFS Ψ der transformierten Gleichung

$$z'=Rz=\begin{pmatrix} f-g & 0 \\ 0 & f+g\end{pmatrix}z$$

gegeben durch

$$\Psi=\begin{pmatrix} \exp(F-G) & 0 \\ 0 & \exp(F+G)\end{pmatrix}=\exp(F)\begin{pmatrix} \exp(-G) & 0 \\ 0 & \exp(G)\end{pmatrix}$$

Ein LFS Φ des ursprünglichen Systems $y'=Pz$ finden wir dann mit $\Phi=A^{-1}\Psi$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\exp(F)\begin{pmatrix} \exp(-G) & 0 \\ 0 & \exp(G)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\exp(F)}{2}\begin{pmatrix} \exp(-G) & \exp(G) \\ -\exp(-G) & \exp(G)\end{pmatrix}=:(\varphi_1,\varphi_2).$$

Bilden wir noch die Linearkombinationen $\varphi_1+\varphi_2$ und $\varphi_2-\varphi_1$, so erhalten wir

$$\tilde{\Phi} = (\varphi_1+\varphi_2, \varphi_2-\varphi_1) = \exp(F)\begin{pmatrix} \cosh(G) & \sinh(G) \\ \sinh(G) & \cosh(G) \end{pmatrix}.$$

Dies hat für die spezielle Wahl $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ mit $F(x_0) = G(x_0) = 0$ den Vorteil, dass $\tilde{\Phi}(x_0) = E_2$, so dass die Lösung des AWP

$$y' = Py, \qquad y(x_0) = y_0$$

berechnet werden kann zu

$$y(x) = \tilde{\Phi}(x)\cdot y_0.$$

(2) $n=2$, $P(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix}$, also $P = \begin{pmatrix} f & g \\ -g & f \end{pmatrix}$

Obwohl von fast identischer Struktur, läßt sich dieses System nicht über $\mathbb{R}$ in derselben Weise diagonalisieren. Eine Möglichkeit zur Lösung besteht darin, die komplexe Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Inverser} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

zu verwenden. Dies führt auf

$$z' = APA^{-1}z = \begin{pmatrix} f-ig & 0 \\ 0 & f+ig \end{pmatrix} z$$

mit dem LFS

$$\Psi = \exp(F)\begin{pmatrix} \exp(-iG) & 0 \\ 0 & \exp(iG) \end{pmatrix},$$

wobei wieder F und G Stammfunktionen von f und g sind. Ein LFS für $y' = Py$ ist hier gegeben durch

$$\Phi = A^{-1}\Psi = \frac{1}{2}\exp(F)\begin{pmatrix} \exp(-iG) & -i\exp(iG) \\ -i\exp(-iG) & \exp(iG) \end{pmatrix}.$$

Wir werden dieses System später mit einer anderen Methode behandeln. (ÜA: Ausführung der Einzelheiten zu (2).)

Fall 3: Die Matrizen $P(x)$ und $\mathbb{P}(x) := \int P(x)dx$ kommutieren für alle $x \in I$ (d.h. $P(x)\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(x)P(x)$ $\forall x \in I$).

Satz 1: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$. Für jedes $x \in I$ gelte $P(x)\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(x)P(x)$. Dann ist durch

$$\Phi(x) = \exp(\mathbb{P}(x))$$

ein LFS von $y' = Py$ gegeben. Ist speziell $\mathbb{P}(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt$, so gilt $\Phi(x_0) = E_n$, und die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Py, \qquad y(x_0) = y_0 \ (\in \mathbb{K}^n)$$

ist gegeben durch $y(x) = \Phi(x)y_0$.

Bew.: $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{P}(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dx} \mathbb{P}(x)^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \{ P(x)\, \mathbb{P}(x)^{k-1} + \mathbb{P}(x) P(x) \mathbb{P}(x)^{k-2} + \dots + \mathbb{P}(x)^{k-1} P(x) \}$$

Hierbei ist zu beachten, dass für die Ableitung matrixwertiger Funktionen zwar die Produkt-, nicht aber die Kettenregel gilt. Mit der Vertauschbarkeit von P und $\mathbb{P}$ folgt

$$\{\dots\} = P(x) \cdot k \cdot \mathbb{P}(x)^{k-1}, \quad \text{also}$$

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(x) \frac{k}{k!} \mathbb{P}(x)^{k-1} = P(x) \exp(\mathbb{P}(x)) = P(x)\, \Phi(x).$$

Ferner ist $\exp(\mathbb{P}(x))$ invertierbar (mit inverser Matrix $\exp(-\mathbb{P}(x))$), also liegt tatsächlich ein LFS vor. □

Von Interesse ist natürlich eine Charakterisierung derjenigen Matrix-Funktionen P, die der Voraussetzung des Satzes genügen. Eine hinreichende Bedingung stellt das folgende Lemma zur Verfügung:

Lemma 4: Es seien $p_0, p_1, \dots, p_M \in C(I, \mathbb{K})$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P = \sum_{i=0}^{M} p_i A^i$ und $\mathbb{P}(x) = \int P(x)\,dx$. Dann gilt

$$[P(x), \mathbb{P}(x)] := P(x)\mathbb{P}(x) - \mathbb{P}(x) P(x) = 0.$$

Beweis: Es seien $P_0, \dots, P_M$ Stammfunktionen von $p_0, \dots, p_M$, so daß $\mathbb{P} = \sum_{i=0}^{M} P_i A^i$. Dann ist

$$[P(x), P(x)] = [\sum_{i=0}^{H} p_i(x) A^i, \sum_{j=0}^{H} P_j(x) A^j]$$
$$= \sum_{i,j=0}^{H} p_i(x) P_j(x) [A^i, A^j] = 0. \qquad \square$$

Folgerung: (1) ist $y' = Py$ ein Dgl.-System mit konstanten Koeffizienten, also P eine konstante Matrix, so ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt.

(2) Ebenso für $P(x) = f(x) E_n + g(x) \cdot A$ mit einer konstanten Matrix A.

(3) Zyklische Matrizen der Form

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & \cdots & & p_n(x) \\ p_n(x) & p_1(x) & \cdots & p_{n-1}(x) \\ p_{n-1}(x) & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ p_2(x) & & p_n(x) & p_1(x) \end{pmatrix}$$

genügen ebenfalls der Voraussetzung. Denn für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

ist $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1}(x) A^i$.

Auf der anderen Seite gibt es sehr einfache Matrizen, die der Vertauschungsbedingung des Satzes nicht genügen, und für die die Matrix-Exponentialfunktion auch kein LFS liefert. Diese Voraussetzung ist also notwendig.

Bsp.: $P(x)=\begin{pmatrix}0&2x\\1&0\end{pmatrix}$ mit $\mathbb{P}(x)=\int P(x)\,dx=\begin{pmatrix}0&x^2\\x&0\end{pmatrix}$

Hier ist $P(x)\,\mathbb{P}(x)=\begin{pmatrix}0&2x\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x^2\\x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x^2&0\\0&x^2\end{pmatrix}$

und $\mathbb{P}(x)\,P(x)=\begin{pmatrix}0&x^2\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2x\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2&0\\0&2x^2\end{pmatrix}$,

also $[P(x),\mathbb{P}(x)]\neq 0$ für alle $x\neq 0$. Bei der Berechnung von $\exp(\mathbb{P}(x))$ ist zu beachten, dass

$$\mathbb{P}(x)^2=\begin{pmatrix}0&x^2\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x^2\\x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^3&0\\0&x^3\end{pmatrix}=x^3E_2.$$

Durch Aufspalten der Exponentialreihe in gerade und ungerade Potenzen von $\mathbb{P}(x)$ erhält man für $x>0$

$$\exp(\mathbb{P}(x))=\begin{pmatrix}\cosh(x^{3/2}) & x^{\frac{1}{2}}\sinh(x^{3/2})\\ \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}\sinh(x^{3/2})}_{=:\varphi_1(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(x)\\ \varphi_{21}(x)\end{pmatrix}} & \cosh(x^{3/2})\end{pmatrix}.$$

Wäre dies ein LFS, müßte insbesondere $\varphi_1'=P\varphi_1$, also z.B. $\varphi_{11}'(x)=2x\,\varphi_{21}(x)$ gelten. Es ist aber

$$\varphi_{11}'(x)=\sinh(x^{3/2})\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\neq 2x^{\frac{1}{2}}\sinh(x^{3/2})=2x\cdot\varphi_{21}(x).$$

Also führt die Verwendung der Matrix-Exponentialfunktion in diesem Fall <u>nicht</u> auf ein Lösungsfundamentalsystem.

Bsp.: Die Koeffizienten-Matrix $P(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ -g(x) & f(x) \end{pmatrix}$ (s.o.)

erfüllt hingegen die Voraussetzung von Satz 1 (vgl. Folgerung (2) aus Lemma 4). Sind F und G Stammfunktionen von f und g, erhalten wir ein LFS von $y' = Py$ durch

$$\phi = \exp\begin{pmatrix} F & G \\ -G & F \end{pmatrix} = \exp(F) \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k, \text{ wobei } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also .. $$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} G^k}{k!} E_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} G^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos(G) E_2 + \sin(G) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(G) & \sin(G) \\ -\sin(G) & \cos(G) \end{pmatrix}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem ist also gegeben durch

$$\phi(x) = \exp(F(x)) \begin{pmatrix} \cos(G(x)) & \sin(G(x)) \\ -\sin(G(x)) & \cos(G(x)) \end{pmatrix}$$

Ist zusätzlich eine Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, wählt man hierin $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ und $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$ und erhält $\phi(x_0) = E_2$ und damit $y(x) = \phi(x) \cdot y_0$ als Lösung des AWP $y' = Py$, $y(x_0) = y_0$.

Anwendung: Das AWP $y'(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{2x}{1+x^2} \end{pmatrix} y$, $y(0) = y_0 = (a,b)$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \ln(1+x^2), \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow G(x) = \arcsin(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = (1+x^2) \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} & x \\ -x & \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1+x^2) \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2}\,a + x b \\ -x a + \sqrt{1-x^2}\,b \end{pmatrix}.$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts beweisen wir noch die "Variation-der-Konstanten"-Formel zur Lösung des inhomogenen Systems:

Satz 2: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^n$, $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$, $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$ und $\Phi \in C^1(I, M_n(\mathbb{K}^n))$ ein LFS des homogenen Systems $y' = Py$. Dann ist durch

$$y_p(x) = \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\, Q(t)\, dt$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $y' = Py + Q$ mit $y_p(x_0) = 0$ gegeben.

Bew.: $$y_p'(x) = \Phi'(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\, Q(t)\, dt + \Phi(x)\, \Phi^{-1}(x)\, Q(x)$$

$$\underset{\text{da } \Phi \text{ LFS}}{=} P\,\Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\, Q(t)\, dt + Q(x) = P y_p(x) + Q(x).$$

$y_p(x_0) = 0$ ist offensichtlich. □

Folgerungen: (1) Der Lösungsraum von $y' = Py + Q$ ist gegeben durch $\{\Phi c + y_p : c \in \mathbb{K}^n\}$ mit y_p wie in Satz 2.

(2) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Py + Q, \qquad y(x_0) = y_0$$

errechnet sich zu

$$y(x) = \Phi(x)\, y_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\, Q(t)\, dt,$$

sofern $\Phi(x_0) = E_n$ gilt.

Bsp.: Zu lösen ist das AWP $y' = Py + Q$, $y(0) = y_0$ für

$$P(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2} & x \\ 0 & \frac{2x}{1+x^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein LFS der homogenen Gleichung $y' = Py$ mit $Y(0) = E_2$

ist $$Y(x) = (1+x^2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie wir im Tutorium berechnet haben. Die Inverse ist

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x^2/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $$Y^{-1}(t)\cdot Q(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{t^2}{2}}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir

$$y_p(x) = Y(x)\cdot \int_0^x Y^{-1}(t)\,Q(t)\,dt = (1+x^2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\int_0^x \begin{pmatrix} \frac{2-t^2}{2(1+t^2)} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} dt$$

wobei $\frac{2-t^2}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1+t^2} - 1\right) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}$ ist, so daß

$$\int_0^x \begin{pmatrix} \frac{2-t^2}{2(1+t^2)} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} \\ \arctan(x) \end{pmatrix} \quad \text{und damit}$$

$$y_p(x) = (1+x^2)\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\arctan(x) \\ \arctan(x) \end{pmatrix}$$

Die Lösung des AWP ist dann gegeben durch

$$y(x) = (1+x^2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 + y_p(x).$$ (Ende 3.2)