3.3 Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Unter einer gewöhnlichen linearen Dgl. der Ordnung n verstehen wir eine Gleichung der Form

$$Ly = q$$

mit einer gegebenen rechten Seite $q \in C(I, \mathbb{K})$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) und einem linearen Differenzialoperator

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

bzw. ausführlich

$$Ly(x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x).$$

Von den Koeffizientenfunktionen wird hierbei ebenfalls vorausgesetzt, dass $a_k \in C(I, \mathbb{K})$, $0 \le k \le n-1$. Eine solche Gleichung nennen wir homogen, wenn $q = 0$ gilt, andernfalls inhomogen.

Gesucht ist eine Lösung $y \in C^n(I, \mathbb{K})$.

Um uns die Ergebnisse über lineare Systeme 1. Ordnung zunutze zu machen, wandeln wir die Gleichung $Ly = q$ zunächst um in ein äquivalentes System von n Gleichungen 1. Ordnung.

Dazu setzen wir $y_1 := y$, $y_2 := y'$, $\dots$ $y_n := y^{(n-1)}$.

Ist nun $y \in C^n(I, \mathbb{K})$ eine Lösung von $Ly = q$, so ist $(y_1, \dots, y_n)^T \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k y_{k+1} + q \end{aligned}$$

bzw. in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Ist umgekehrt $(y_1, \dots, y_n)^T \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ eine Lösung dieses Systems, so ist $y = y_1 \in C^n(I, \mathbb{K})$ eine Lösung der Gleichung $Ly = q$.

Folgerungen: (1) Der Lösungsraum der Gleichung $Ly = q$ ist ein n-dimensionaler affiner Teilraum von $C^n(I, \mathbb{K})$, im Fall $q = 0$ ein Untervektorraum.

(2) Ein angemessenes Anfangswertproblem für die Gleichung $Ly = q$ besteht in der Vorgabe von n Anfangswerten

$$y(x_0) = y_{0,0}, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad y''(x_0) = y_{0,2}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

mit $y_{0,0}, \dots, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $x_0 \in I$. Durch die Vorgabe dieser Werte wird die Eindeutigkeit einer Lösung $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ von $Ly = q$ erzwungen.

(3) Ein System $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I, \mathbb{R})$ von Lösungen von $Ly = 0$ (also der homogenen Gleichung) heißt ein Lösungsfundamentalsystem (LFS), wenn $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in $C^n(I, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Wronski-Determinante

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x) := \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

in einem Punkt $x_0 \in I$ (und damit im gesamten Intervall) von Null verschieden ist.

(Beachte: setzen wir

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & & \varphi_n' \\ & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

so ist Φ ein LFS des äquivalenten Systems 1. Ordnung und es gilt

$$\underbrace{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}_{\text{wie oben definiert}} = W_\Phi \leftarrow \text{frühere Definition f. Systeme 1. Ordnung.})$$

Für den <u>Spezialfall konstanter Koeffizienten</u> soll nun ein LFS explizit angegeben werden. Es sei also

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} \quad \text{mit } a_n = 1,\ a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}.$$

Dann heißt P_L, def. durch

$$P_L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k ,$$

das "charakteristische Polynom" des Differenzialoperators L bzw. der Differenzialgleichung $Ly=0$.

Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen können wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren zerlegen. Also existieren Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von P_L mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$, so daß P_L die Darstellung

$$P_L(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \quad (\text{führender Koeffizient ist } 1!)$$

besitzt. In dieser Situation gilt der folgende

<u>Satz 1</u>: Durch die n Funktionen

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 x},$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_r x}, x e^{\lambda_r x}, \dots, x^{n_r - 1} e^{\lambda_r x}$$

ist ein LFS der Gleichung $Ly = 0$ gegeben.

Bew.: (1) Wir zeigen, dass es sich um Lösungen handelt: Allgemein gilt für $k \geq 1$

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) x^k e^{\lambda x} = k x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$$

und daher

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^m x^k e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für } k \leq m-1.$$

Damit ist für $k \leq m_j - 1$

$$L(x^k e^{\lambda_j x}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_i\right)^{m_i} \underbrace{\left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right)^{m_j} x^k e^{\lambda_j x}}_{=0} = 0.$$

(2) Lineare Unabhängigkeit: Jede Linearkombination der im Satz genannten Funktionen hat die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j.$$

Daher reicht es zu zeigen: $\sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x} = 0 \; \forall x \in I$

$$\overset{(!)}{\Longrightarrow} P_1(x) = \ldots = P_r(x) \quad \forall x \in I.$$

Beweis von (!) per Induktion über r.

$r = 1$: $P_1(x) e^{\lambda_1 x} = 0 \; \forall x \in I \Rightarrow P_1(x) = 0 \; \forall x \in I$ nach Division durch $e^{\lambda_1 x}$ ($\neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$!).

$r \to r+1$ $\quad \sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x} + P_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\underbrace{(\lambda_k - \lambda_{r+1})}_{\neq 0} x} + P_{r+1}(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Jetzt differenziert man so oft, bis $\left(\frac{d}{dx}\right)^N P_{r+1}(x) = 0$ ist $\forall x \in I$.

$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{r} Q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}$ für alle $x \in I$, wobei die Q_k gegeben sind durch $\left(\frac{d}{dx}\right)^N \left(P_k(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}\right) = Q_k(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})}$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $Q_k(x) = 0 \ \forall x \in I$,

also $\left(\frac{d}{dx}\right)^N \left(P_k(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}\right) = 0$ und damit ist

$P_k(x)\, e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}$ ein Polynom. $\Rightarrow P_k(x) = 0 \ \forall x \in I$,

$k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow P_{r+1}(x) = 0 \ \forall x \in I$. $\square$

Bsp. Dgl. einer gedämpften Schwingung:

$$Ly := y'' + 2ay' + b^2 y = 0$$ (Federpendel, mathematisches Pendel, elektrischer Schwingkreis)

$2ay'$: Dämpfung, daher $a \geq 0$

$b^2 y$: Rücktreibende Kraft $(b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = P_L(\lambda)$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$

Wir unterscheiden 4 Fälle:

1. $a = 0$ (Schwingung ohne Dämpfung): $\lambda_{1,2} = \pm ib$

   $\varphi_{1,2}(x) = e^{\pm ibx}$ bilden ein LFS,

   durch Linearkombination kann man die reellen Lösungen $\psi_1(x) = \cos(bx)$, $\psi_2(x) = \sin(bx)$ erzeugen.

2. $0 < a^2 < b^2$ (gedämpfte Schwingung): $\lambda_{1,2} = -a \pm i\omega$
   $\omega = \sqrt{b^2 - a^2}$

   $\varphi_{1,2}(x) = e^{-ax} e^{\pm i\omega x}$ bilden ein LFS, ein reelles LFS ist:

   $\psi_1(x) = e^{-ax}\cos(\omega x)$, $\psi_2(x) = e^{-ax}\sin(\omega x)$

3. $a^2 = b^2$ (aperiodischer Grenzfall) : $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$

   $\varphi_1(x) = e^{-ax}$, $\varphi_2(x) = x e^{-ax}$ bilden ein reelles LFS.

4. $b^2 < a^2$ (Pendel im Honig) : $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ (< 0).

   Ein reelles LFS ist gegeben durch

   $\varphi_{1,2}(x) = e^{\lambda_{1,2} x}$.