

Klausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

a) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.

Antwort: richtig ☐ falsch ☐ Enthaltung ☐ (2/1/0 P.)

b) Ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ konvergent, so konvergiert die trigonometrische Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion.

Antwort: richtig ☐ falsch ☐ Enthaltung ☐ (2/1/0 P.)

c) Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und partiell differenzierbar.

Antwort: richtig ☐ falsch ☐ Enthaltung ☐ (2/1/0 P.)

d) Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar.

Antwort: richtig ☐ falsch ☐ Enthaltung ☐ (2/1/0 P.)

e) Ist durch $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x)$ eine Folge uneigentlich über $\mathbb{R}$ integrierbarer Funktionen gegeben, die gleichmäßig gegen Null konvergiert, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 0$.

Antwort: richtig ☐ falsch ☐ Enthaltung ☐ (2/1/0 P.)

2. (4 + 3 P.)

a) Geben Sie die Definition einer Metrik genau an.

b) Wird durch $d(x, y) = |x - y|^3$ eine Metrik auf $[0, 1]$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden!

3. (3 + 3 P.)

a) Bestimmen Sie eine differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass
 $\text{grad } \phi(x, y) = (2x + y, x + 4y)$.

b) Für die Funktion ϕ aus Teil (a) berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x_0, y_0)$ nach
 $\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 3)$.

4. (4 + 11 + 5 P.)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + y^2 \exp y$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f .

b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf., ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

c) Besitzt f globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort!

5. (6 P.)

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators das Minimum der Funktion
 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ auf der Geraden

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 15\}.$$

Hinweis: Es ist nicht erforderlich, die Existenz des Minimums zu zeigen!

6. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Separation: (4 + 6 P.)

a) $y'(x) = \cos(x) \exp(-y(x)), \quad y(0) = 1,$

b) $y'(x) = (y(x) + x)^2 - 1, \quad y(0) = 1.$

7. (9 P.)

Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem für $y' = Py$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$