A1 Lösungen:

(a) Richtig, s. Vorlesung: Abschnitt 1.5, Satz 1 (b)

(b) Falsch, Bsp. $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ für $k \geq 1$, sonst $a_k = 0$.

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium,

aber $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$ konvergiert nicht für alle x.

Für $x = \pi$ ist z.B. $e^{ikx} = (-1)^k$ und damit

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Ferner gilt für jedes

$x \in \mathbb{R}$ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k e^{ikx}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, also ist die

Konvergenz für kein $x \in \mathbb{R}$ absolut.

(c) Richtig., s. Vorl.: Abschnitt 2.2, Lemma 2 und Satz 1.

(d) Falsch, diff'bare Funktionen mit unstetiger Ableitung haben wir schon in Ana I kennengelernt.

z.B. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

(e) Falsch, z.B. ist für $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}(x)$ stets

$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$, obwohl $\lim_{n\to\infty} \sup\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Lösung A2:

(a) X sei eine (nichtleere) Menge. Eine

Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt eine Metrik, (1P.)

falls (i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in X$ (1P.)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ — " — (1P.)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (1P.)

(b) Durch $d(x,y) = |x-y|^3$ wird keine Metrik

auf $[0,1]$ definiert, (1P.)

denn die Dreiecksungleichung (Eigenschaft (iii) oben) gilt für d nicht. (1P.)

Bsp.: $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1$. Dann ist $d(x,z) = 1$,

aber $d(x,y) + d(y,z) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$. (1P.)

Lösung A3:

(a) Gesucht: φ mit $\nabla\varphi(x,y) = (2x+y, x+4y)$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 2x+y \Rightarrow \varphi(x,y) = \int 2x+y\,dx = x^2+xy+c_1(y) \quad (1P.)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = x+4y \Rightarrow \varphi(x,y) = \int x+4y\,dy = xy+2y^2+c_2(x) \quad (1P.)$$

Vergleich: $\varphi(x,y) = x^2+xy+2y^2\ (+c)$ (1P.)

(Alternativ: Lösung wird angegeben und es wird durch Ableiten $\nabla\varphi(x,y) = (2x+y, x+4y)$ verifiziert.)

(b) $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x_0,y_0) = ?$ für φ wie in (a), $\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$

und $(x_0,y_0) = (2,3)$

Es ist $\nabla\varphi(2,3) = (4+3, 2+12) = 7(1,2)$ (1P.)

und $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(2,3) = \langle\nabla\varphi(2,3),\xi\rangle = \frac{7}{\sqrt{5}}\langle(1,2),(2,-1)\rangle = 0$ 1P.

1P. (für die Kenntnis der Formel für die Richtungsableitung)

Lösung A4 (Extremwertaufgabe):

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) := x e^{-x^2/2} + y^2 e^y$$

(a) kritische Stellen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-x^2)e^{-x^2/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y^2+2y)e^y \qquad 2P.$$

Die Forderung $\nabla f(x,y) = 0$ führt auf $x \in \{\pm 1\}, y \in \{-2, 0\}$ 1P.

Kritische Stellen $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (1,-2)$, $P_3 = (-1,0)$, $P_4 = (-1,-2)$. 1P.

(b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (x^3 - 3x)e^{-x^2/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (y^2+4y+2)e^y \qquad 2P.$$

Offenbar verschwinden die gemischten Ableitungen, so daß

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^3-3x)e^{-x^2/2} & 0 \\ 0 & (y^2+4y+2)e^y \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

Im einzelnen:

$$\operatorname{Hess} f(P_1) = \begin{pmatrix} -2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ indefinit,} \qquad 1P.$$

$\Rightarrow$ In P_1 liegt kein Extremum vor. 1P.

$$\operatorname{Hess} f(P_2) = \begin{pmatrix} -2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}, \text{ negativ definit,} \qquad 1P.$$

$\Rightarrow$ In P_2 liegt ein lokales Maximum vor 1P.

$$\operatorname{Hess} f(P_3) = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ positiv definit} \qquad 1P.$$

$\Rightarrow$ In P_3 liegt ein lokales Minimum vor 1P.

$$\operatorname{Hess} f(P_4) = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}, \text{ indefinit} \qquad 1P.$$

$\Rightarrow$ kein Extremum 1P.

(c) Da $\lim_{y \to \infty} f(x,y) = \infty$ (für jedes x, hier z.B. $x=0$

zu wählen, ist ausreichend), 1P.

existiert kein globales Maximum. 1P.

In $P_3 = (-1, 0)$ liegt ein globales Minimum vor. 1P.

Begründung: $f(x,y) \geq f(x,0) \geq \inf\{ x e^{-x^2/2} : x \in \mathbb{R}\}$

und dieses Infimum ist wegen $\lim_{|x| \to \infty} x e^{-x^2/2} = 0$

$= \min\{ x e^{-x^2/2} : x \in \mathbb{R}\} = x e^{-x^2/2}\Big|_{x=-1}$,

wie die obigen Rechnungen zeigen. Letzteres

ist identisch mit $f(-1,0) = f(P_3)$ 2P.

Lösung A5 (Extrema mit Nebenbed.):

Es ist $\nabla f(x,y) = (2x, 4y)$ (1P.)

und, für $g(x,y) = x+y-15$, $\nabla g(x,y) = (1,1)$ (1P.)

Die notwendige Bedingung für ein Extremum,

nämlich $\nabla(f - \lambda g) \overset{!}{=} (0,0)$, (1P.)

führt auf das Gleichungssystem

$$2x = \lambda \quad ; \quad 4y = \lambda$$ (1P.)

Einzige Lösung (und damit kritische Stelle):

$$(x,y) = (10,5)$$ (1P.)

Einsetzen in f ergibt

$$\min\{f(x,y) : (x,y) \in G\} = f(10,5) = 150$$ (1P.)

(Ein Maximum gibt es nicht, da $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in G}} f(x,y) = \infty$,

aber danach ist nicht gefragt.)

Lösung A6 (Separation):

(a) $y'(x) = \cos(x)\, e^{-y(x)} \Rightarrow e^{y(x)} \cdot y'(x) = \cos(x)$

$$\underset{\text{(Subst.-regel)}}{\Rightarrow} \int e^{y}\, dy \Big|_{y=y(x)} = \int \cos(x)\, dx \qquad \text{1P.}$$

$$\Rightarrow e^{y(x)} = \sin(x) + C \qquad \text{1P.}$$

$$\Rightarrow y(x) = \ln(\sin(x) + C) \qquad \text{1P.}$$

Jetzt $y(0) = 1$: $1 = \ln(C)$, also $C = e$, $y(x) = \ln(\sin(x) + e)$ 1P.

!

(b) $y' = (y + x)^2 - 1$

1P.

Subst.: $z = y + x \Rightarrow z' = y' + 1 = z^2 - 1 + 1 = z^2$ 1P.

$$\Rightarrow \int \frac{z'(x)}{z^2(x)}\, dx = \int \frac{dz}{z^2} \Big|_{z=z(x)} = \int dx \qquad \text{1P.}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z(x)} = x + C \qquad \text{1P.}$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{-1}{x+C} \Rightarrow y(x) = -x - \frac{1}{x+C} \qquad \text{1P.}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-1}{C} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y(x) = -x - \frac{1}{x-1} \qquad \text{1P.}$$

$$\left(= \frac{1}{1-x} - x \right)$$

Lösung A7:

1. Lösungsweg: Man setzt ein LFS in Dreiecksgestalt an, also

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ 0 & \varphi_{22}(x) \end{pmatrix}$$ 1P.

Für die Diagonalelemente hat man die (hom. lin.) Dglen

1P.

$$\varphi_{11}'(x) = \varphi_{11}(x)$$

und $\varphi_{22}'(x) = x \cdot \varphi_{22}(x)$ 1P.

mit den Lösungen

$$\varphi_{11}(x) = C_{11}\, e^{x}$$ (ggf. auch gleich mit $C_{11}=1$) 1P

und $$\varphi_{22}(x) = C_{22}\, e^{x^2/2}$$ (" " " " $C_{22}=1$) 1P.

Für φ_{12} erhält man die (inhom. lin.) Dgl.

$$\varphi_{12}'(x) = \varphi_{12}(x) + (1-x)\cdot\varphi_{22}(x)$$

$$= \varphi_{12}(x) + (1-x)\cdot e^{x^2/2}$$ 1P.

mit Lösung (Lösungsformel für die inhomogene Gleichg)

$$\varphi_{12}(x) = C_{12}\, e^{x} + e^{x}\int (1-t)\, e^{t^2/2 - t}\, dt$$ 1P

$$= C_{12}\, e^{x} - e^{x}\, e^{x^2/2 - x} = C_{12}\, e^{x} - e^{x^2/2}$$ 1P.

Zsf.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} C_{11}\, e^{x} & C_{12}\, e^{x} - e^{x^2/2} \\ 0 & C_{22}\, e^{x^2/2} \end{pmatrix}$$ 1P.

Hierin ist jede Wahl von C_{ij} zulässig, solange $C_{11} \neq 0 \neq C_{22}$.

Zusatz: Alternativ: Matrixexp.-Funktion 1P.

Lösung A7

2. Lösungsweg: Es ist

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ & 1-(1-x) \end{pmatrix} = E_2 + (1-x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(= f(x)E_2 + g(x)A\right),$$ 1P.

also ist durch

$$\phi(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)$$ 1P.

ebenfalls ein LFS gegeben. Wir berechnen

$$\int P(x)\,dx = x E_2 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$ so daß 1P.

$$\phi(x) = e^x \exp\left(\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\right),$$ 1P.

wobei $A^0 = E_2$ und für $k \geq 1$ $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1P.

dies ergibt

$$\exp\left(\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2} - x\right)^k}{k!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1P.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{\frac{x^2}{2} - x} \\ 0 & e^{x^2/2 - x} - 1 \end{pmatrix}$$ 1P.

woraus

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^x - e^{x^2/2} \\ 0 & e^{x^2/2} - e^x \end{pmatrix}$$ 1P.

$$= \begin{pmatrix} e^x & e^x - e^{x^2/2} \\ 0 & e^{x^2/2} \end{pmatrix}$$ 1P.

folgt. Zusatz: Verfahren für Systeme in Δ's-Form 1P.