Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2012/13
22.03.2013

Nachklausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten “richtig”, ”falsch“ oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen! - In den Aufgabenteilen c) und e) sei vorausgesetzt, dass $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm versehen ist.

   a) Das Anfangswertproblem $y'(x) = |y(x)|^{\frac{1}{2}}$, $y(0) = 0$, besitzt genau eine lokale Lösung.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

   b) Ist durch $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x)$ eine Folge stetiger Funktionen gegeben, die gleichmässig gegen Null konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

   c) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, so ist A kompakt.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

   d) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existieren auch alle Richtungsableitungen von f, und diese sind stetig.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

   e) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}^n$.

   Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

2. (4 + 6 P.)

   a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher genau!

   b) Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^\top$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \mapsto f(y_1, y_2) = y_1 y_2$. Berechnen Sie $D(f \circ g)(x_1, x_2)$ mit Hilfe der Kettenregel!

Bitte wenden!

3. (4 + 11 + 2 P.)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = x(2x^2+3x-12)+(y^2+2y-7)\exp y$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f .

b) Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen lokale Extrema vorliegen, und entscheiden Sie ggf., ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

c) Besitzt f globale Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Gegeben sei die Funktion (6 + 6 P.)

$$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2(\cos y, \sin y)^\top.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und deren Determinante.

b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv bzw. überall lokal invertierbar ist.

5. Gegeben sei das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem (8 + 8 + 3 P.)

$y' = Py + q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q(x) = x \begin{pmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie ein Lösungsfundamentalsystem Φ des homogenen Systems, für das $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Lösung y_p des inhomogenen Systems, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0,0)^\top$ genügt.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Py + q$, $y(0) = (-1,1)^\top$.

Die Klausur gilt mit 34 (bzw. mit 27) von 68 erreichbaren Punkten als bestanden. Viel Erfolg!