Richtig oder falsch? (A 1, wie üblich 10 P.)

(a) Das Anfangswertproblem $y'(x) = |y(x)|^{\frac{1}{2}}$, $y(0)=0$, besitzt genau eine lokale Lösung.

(b) Ist durch $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x)$ eine Folge stetiger Funktionen gegeben, die gleichmässig gegen Null konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(c) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, so ist A kompakt.

(d) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existieren auch alle Richtungsableitungen von f, und diese sind stetig.

(e) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ sowohl offen, als auch abgeschlossen, so ist $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}^n$.

Bem.: In den Aufgabenteilen (c) und (e) sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm versehen.

Lös.: f, r, r, r, r

A 1	10
2	10
3	17
4	12
5	19
Σ	68

(wie geplant.)

A 2 (a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher genau! (4P.)

(b) Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \mapsto f(y_1, y_2) = y_1 y_2$.

Berechnen Sie $D f \circ g(x_1; x_2)$ mit Hilfe der Kettenregel! (6P.)

Lös: (a) Voraussetzungen: $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ offen 1P.

$g : \Omega \to \Omega'$, $f : \Omega' \to \mathbb{R}^n$;

beide (total) d'bar. 1P.

Dann ist auch $f \circ g$ total d'bar 1P.

und es gilt $D f \circ g(x) = D f(g(x))\, D g(x)$. 1P.

(b) $$D g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ 2P.

$$D f(y_1, y_2) = \nabla f(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$$ 2P.

$$(D f \circ g(x_1, x_2) =)\ D f(g(x_1; x_2)) \cdot D g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ 1P.

$$= (2x_1, -2x_2)$$ 1P.

A3 Formulierung wie gehabt, aber mit alte A4

$$f(x,y) = x(2x^2+3x-12) + (y^2+2y-7)e^y$$

(Punkte: (a) 4 P. (b) 11 P. (c) 2 P.) ($\sum$ 17 P.)

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2+6x-12 = 6(x-1)(x+2)$ 1P.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y^2+4y-5)e^y = (y-1)(y+5)e^y$ 1P.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \Leftrightarrow x\in\{1,-2\}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow y\in\{1,-5\}$ 1P.

Die kritischen Stellen sind also

$(1,1)$; $(1,-5)$; $(-2,1)$; $(-2,-5)$ 1P.

(b) Mit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(2x+1)$ 1P.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$ 1P.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (y^2+6y-1)e^y$ 1P.

erhält man für die Hesse-Matrix in den kritischen Stellen

$$\operatorname{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}$$ 1P.

positiv definit, hier liegt ein lokales Minimum vor 1P.

$$\operatorname{Hess} f(1,-5) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -6e^{-5} \end{pmatrix}$$ 1P.

indefinit, es liegt kein Extremum vor. 1P.

... noch zu A4, Teil (b):

$$\mathrm{Hess}\, f(-2,1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}$$ 1P.

indefinit, kein Extremum 1P.

$$\mathrm{Hess}\, f(-2,-5) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -6e^{-5} \end{pmatrix}$$ 1P.

negativ definit, lokales Maximum. 1P.

(c) Aus $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ 1P.

folgt, dass f kein globales Extremum besitzt. 1P.

~~5~~ 4

Aufg. 4: Gegeben sei die Funktion

$\boxed{12 \text{ P.}}$

$$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2(\cos y, \sin(y))^T.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und deren Determinante. (6 P.)

(b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv bzw. überall lokal invertierbar ist (6 P.)

Zu (a)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \\ 2x\sin(y) & x^2\cos(y) \end{pmatrix} \qquad \boxed{4\text{P.}}$$

(für jeden richtigen Eintrag 1P.),

$$\det Df(x,y) = 2x^3\cos^2(y) + 2x^3\sin^2(y) \qquad \boxed{1\text{P.}}$$

$$= 2x^3 \qquad \boxed{1\text{P.}}$$

Zu (b) (i) Nicht injektiv, da $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$ $\boxed{1+1 \text{ P.}}$

(ii) surjektiv, denn: zu $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existieren $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi]$ so daß $(u,v) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Wähle $x = \sqrt{r}$, $y = \varphi$. $\boxed{1+1 \text{ P.}}$
Dann ist $(u,v) = f(x,y)$.

(iii) überall lokal invertierbar – nach dem Satz über inverse Abbildungen, da $\det Df(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$. $\boxed{1+1 \text{ P.}}$

(Für jede richtige Bel. gibt's schon ein Punkt.)

19 P.

Aufg. ~~6~~ 5: Gegeben sei das inhomogene lineare Dgl. System

$y' = Py + q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q(x) = x \begin{pmatrix} \cosh(x) \\ \sinh(x) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie ~~..~~ ein Lösungsfundamentalsystem ϕ des homogenen Systems, für das System $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. (8P.)

(b) Bestimmen Sie die Lösung y_P des inhomogenen Systems, ~~...~~ die ~~..~~ der Anfangsbedingung $y_P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ genügt. (8P.)

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$y' = Py + q$, $y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$. (3P.)

Lösung: Zu (a) Es ist $P(x) = x E_2 + A$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also ist das gesuchte LFS gegeben durch $\phi(x) = \exp \int_0^x P(t)dt$. $\boxed{1P.}$

Dabei ist $$\int_0^x P(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} & x \\ x & \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} (=: \mathbb{P}(x))$$ $\boxed{1P.}$

mit $$\exp(\mathbb{P}(x)) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$ $\boxed{1P.}$

und $$\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k.$$ $\boxed{1P}$

mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man $\boxed{1P}$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1P.}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix} \qquad \boxed{1P.}$$

(Diese Rechnung kam in V. und Ü. vor. Wer nicht alle Einzelheiten ausführt, erhält also - bei richtigem Ergebnis - die volle Punktzahl.)

Insg.: $\Phi(x) = \exp(\frac{x^2}{2})\begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$ $\boxed{1P.}$

Zu (b): Es ist $\Phi^{-1}(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})\begin{pmatrix} \cosh(x) & -\sinh(x) \\ -\sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$

$\boxed{3P.}$

(man braucht: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, den "hyperbolischen Pythagoras" und muß das richtig zusammenfügen.)

und daher

$$\Phi^{-1}(t)\, q(t) = t\exp(-\frac{t^2}{2})\begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$$

$$= t\exp(-\frac{t^2}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{2P.}$$

Also

$$y_p(x) = \Phi(x)\int_0^x \Phi^{-1}(t)\, q(t)\, dt \qquad \boxed{1P.}$$

$$= \Phi(x)\int_0^x t\exp(-\frac{t^2}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \Phi(x)\begin{pmatrix} 1-\exp(-\frac{x^2}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1P.}$$

$$= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\exp(-\frac{x^2}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)-1\right)\begin{pmatrix} \cosh(x) \\ \sinh(x) \end{pmatrix}$$ $\boxed{1P.}$

zu (c): Die gesuchte Lösung ist jetzt gegeben durch

$$y(x) = \Phi(x)\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} + y_P(x)$$ $\boxed{1P.}$

$$= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} + y_P(x)$$

$$= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} \sinh(x)-\cosh(x) \\ \cosh(x)-\sinh(x) \end{pmatrix} + \left(\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)-1\right)\begin{pmatrix} \cosh(x) \\ \sinh(x) \end{pmatrix}$$ $\boxed{1P.}$

$$= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\begin{pmatrix} \sinh(x) \\ \cosh(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cosh(x) \\ \sinh(x) \end{pmatrix}$$ $\boxed{1P.}$