Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2014/15
09.02.2015

Klausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Sind (X, d) und (X', d') kompakte metrische Räume und $\delta((x, x'), (y, y')) = d(x, y) + d'(x', y')$ die Produktmetrik auf $X \times X'$, so ist auch $(X \times X', \delta)$ ein kompakter metrischer Raum.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Ist $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f ebenfalls gleichmäßig stetig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Jede konforme Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist überall lokal invertierbar.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion, so ist f gleichmäßig stetig.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ in jede Richtung ξ differenzierbar mit stetigen Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, so ist f total differenzierbar.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+3+2 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2)^\top \mapsto f(x_1, x_2) := \ln(x_1^2 + x_2^2).$$

   Berechnen Sie

   (a) den Gradienten $\nabla f(x_1, x_2)$,

   (b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0)$ von f nach $\xi = \frac{1}{5}(3, 4)^\top$ im Punkt $x_0 = (1, 2)^\top$,

   (c) alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f,

   und überprüfen Sie,

   (d) ob f harmonisch ist.

3. **(Banachscher Fixpunktsatz, 5 + 8 P.)**

   (a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau!

   (b) Untersuchen Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x_2}}{\sqrt{e}}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + 7}$$

   eine eindeutige Lösung $(x_1^*, x_2^*)^\top \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung, und beweisen Sie diese.

4. **(3+1+1+1 P.)** Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X an und entscheiden Sie, ob durch die nachstehenden Formeln Normen auf $\mathbb{R}^3$ definiert werden:
   (a) $\|x\| = \sqrt{3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2}$,
   (b) $\|x\| = x_1 + \sqrt[5]{|x_2|^5 + |x_3|^5}$,
   (c) $\|x\| = \sqrt[3]{|x_1 x_2 x_3|}$.

   Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.

5. **(2+3+4+2+3+4 P.)** Es sei

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := 6x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - 3x - y.$$

   (a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.
   (b) Bestimmen Sie die kritische Stelle (x_c, y_c) von f. (Es gibt nur eine.)
   (c) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x,y)$.
   (d) Berechnen Sie $\det \mathrm{Hess} f(x,y)$ für ein beliebiges Paar $(x,y) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$, und untersuchen Sie $\mathrm{Hess} f(x,y)$ auf Definitheit.
   (e) Welche Folgerung bezüglich der lokalen Extrema von f ergibt sich aus Ihren bisherigen Ergebnissen?
   (f) Berechnen Sie $f(x_c, y_c)$, und untersuchen Sie, ob es sich bei (x_c, y_c) um eine globale Extremstelle handelt.

6. **(4+7 P.)** Gegeben sei die Hyperbel $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ und die Funktion

$$f : H \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{1}{x+4y}.$$

   (a) Begründen Sie, dass die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.
   (b) Bestimmen Sie - z.B. mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators - $\max\{f(x,y) : (x,y) \in H\}$ und $\min\{f(x,y) : (x,y) \in H\}$.

   Hinweis: Beachten Sie, dass H aus zwei Zusammenhangskomponenten, den sogenannte Hyperbelästen, besteht.

7. **(8 P.)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 1$ für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = xy(x) - x^3.$$

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 37 (von 75 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 30 Punkten. Viel Erfolg!