Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2014/15
09.02.2015

Lösung + Wertung

Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Partielle Ableitungen)	9 Punkte
A3 (Banachscher Fixpunktsatz)	13 Punkte
A4 (Normen)	6 Punkte
A5 (Extremwertaufgabe)	18 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	11 Punkte
A7 (Inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung)	8 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 37 (von 75 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 30 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Sind (X, d) und (X', d') kompakte metrische Räume und $\delta((x, x'), (y, y')) = d(x, y) + d'(x', y')$ die Produktmetrik auf $X \times X'$, so ist auch $(X \times X', \delta)$ ein kompakter metrischer Raum.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(b) Ist $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f ebenfalls gleichmäßig stetig.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(c) Jede konforme Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist überall lokal invertierbar.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(d) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion, so ist f gleichmäßig stetig.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ in jede Richtung ξ differenzierbar mit stetigen Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, so ist f total differenzierbar.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+3+2 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y)^\top \mapsto f(x,y) := \ln(x^2+y^2).$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y)$,

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x, 2y) \qquad \text{(jeweils 1P.)}$$

(b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0)$ von f nach $\xi = \frac{1}{5}(3,4)^\top$ im Punkt $(x_0,y_0) = (1,2)^\top$,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \xi \qquad \text{1P.}$$

$$= \nabla f(1,2)\cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{25}(3+8) = \frac{22}{25} \qquad \text{1P.}$$

(c) alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{1P.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{1P.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{1P}$$

und überprüfen Sie,

(d) ob f harmonisch ist.

$$\Delta f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad \text{1P}$$

1P.

$\Longrightarrow$ f ist harmonisch

(den 2. Punkt also dafür, dass man weiß, was harmonisch ist.)

3. **(Banachscher Fixpunktsatz, 5 + 8 P.)**

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau! Es seien

(X,d) ein vollständiger metrischer Raum, 1P.

$F: X \to X$ 1P.

eine Kontraktion. 1P.

Dann existiert 1P.

genau ein Fixpunkt von F. 1P.

(b) Untersuchen Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x_2}}{\sqrt{e}}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+7}$$

eine eindeutige Lösung $(x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung, und beweisen Sie diese.

Beh.: Das GlS. besitzt genau eine Lösung. 1P.

Bew.: Wir definieren $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{1}{2}\sin(x_2)} \\ \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+7} \end{pmatrix}$$ 1P.

Dann ist $f_1(x_2) - f_1(y_2) = f_1'(\xi)(x_2 - y_2)$ (MWS) 1P

mit $|f_1'(\xi)| = \left|\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi) \cdot e^{\frac{1}{2}\sin(\xi)}\right| \le \frac{1}{2}$, 1P.

also $|f_1(x_2) - f_1(y_2)| \le \frac{1}{2}|x_2 - y_2|$. 1P.

Ebenso $|f_2(x_1) - f_2(y_1)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+7}}\right| |x_1 - y_1| \le \frac{1}{2}|x_1 - y_1|$ 1P.

Zsf $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$ 1P.

Also ist f eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raums $(\mathbb{R}^2, |\,|)$ in sich, und die Beh. folgt aus dem Banachschen FPS. 1P

4. **(3+1+1+1 P.)** Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X an

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, 1P.

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$, 1P.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ 1P.

und entscheiden Sie, ob durch die nachstehenden Formeln Normen auf $\mathbb{R}^3$ definiert werden:

(a) $\|x\| = \sqrt{3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2}$, Ja 1P

(b) $\|x\| = x_1 + \sqrt[5]{|x_2|^5 + |x_3|^5}$, Nein 1P

((N2) verletzt.)

(c) $\|x\| = \sqrt[3]{|x_1 x_2 x_3|}$. Nein 1P.

((N1) verletzt.)

Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.

5. **(2+3+4+2+3+4 P.)** Es sei

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 3x - y.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie die kritische Stelle (x_c, y_c) von f. (Es gibt nur eine.)

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x,y)$.

(d) Berechnen Sie $\det\mathrm{Hess} f(x,y)$ für ein beliebiges Paar $(x,y) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$, und untersuchen Sie $\mathrm{Hess} f(x,y)$ auf Definitheit.

(e) Welche Folgerung bezüglich der lokalen Extrema von f ergibt sich aus Ihren bisherigen Ergebnissen?

(f) Berechnen Sie $f(x_c, y_c)$, und untersuchen Sie, ob es sich bei (x_c, y_c) um eine globale Extremstelle handelt.

(a) $\nabla f(x,y) = \left(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 3,\ 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 1\right)$ (je 1P.)

(b) (x,y) kritisch $\iff \nabla f(x,y) = (0,0)$ 1P.

$\iff x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} = 1 \wedge x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ Lösung des GlS.

$\iff y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \wedge x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{3}}$ 2P.

$\iff y^{\frac{1}{3}} = 2 = x^{\frac{1}{2}} \iff (x,y) = (4, 8)$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ 1P.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$ 1P.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}$ 1P.

$$\Rightarrow \mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}} & x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} \\ x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} & -\frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix}$$ 1P.

(d) $\det \operatorname{Hess} f(x,y) = x^{-1} y^{-\frac{4}{3}}$ 1P.

$\operatorname{Hess} f(x,y)$ ist negativ definit,
da $\det \operatorname{Hess} f(x,y) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$ } 1P.

(e) In $(x_c, y_c) = (4,8)$ liegt ein isoliertes → 1P.
lokales Maximum vor → 1P.

Weitere Extrema gibt es nicht. → 1P.

(f) $f(x_c, y_c) = 4$ 1P.

In (x_c, y_c) liegt ein globales Maximum vor 1P.

Begründung: V1 (Grenzwertbetrachtung): Dies folgt aus $f(x_c, y_c) > 0$ und

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = -\infty$$ 1P.

sowie $$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = -y_0 < 0$$ ½ P

und $$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = -3x_0 < 0$$ ½ P.

V2 Taylor $f(x_c + h_x, y_c + h_y) = f(x_c, y_c) + \frac{1}{2}\langle (h_x,h_y), \operatorname{Hess} f(\xi) \binom{h_x}{h_y} \rangle$

neg. def.

$< f(x_c, y_c) \quad \forall (h_x, h_y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$

gibt auch zwei P.

6. **(4+7 P.)** Gegeben sei die Hyperbel $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ und die Funktion

$$f : H \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{1}{x+4y}.$$

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

Da f stetig ist, 1P.

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in H}} f(x,y) = 0$ gilt 1P.

und f sowohl positive als auch negative Werte annimmt, 1P

folgt die Beh. mit dem Satz vom Maximum. 1P.

(b) Bestimmen Sie - z.B. mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators - $\max\{f(x,y) : (x,y) \in H\}$ und $\min\{f(x,y) : (x,y) \in H\}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass H aus zwei Zusammenhangskomponenten, den sogenannte Hyperbelästen, besteht.

Sei $\varphi(x,y) = xy - 1$. Dann lautet die notwendige Bedingung für lokale Extrema

$0 = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla \varphi(x,y)$ 1P.

$= -\left(\frac{1}{(x+4y)^2}, \frac{4}{(x+4y)^2}\right) - \lambda(y,x)$ 2P. (einen für jeden Gradienten)

Es folgt $\lambda \neq 0$ und damit 1P

$y = \frac{1}{\lambda} \frac{-1}{(x+4y)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{\lambda(x+4y)^2} = \frac{1}{4}x$, d.h. $x = 4y$ 1P.

kritische Stellen: $4y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 2$,

$(x_+, y_+) = (2, \frac{1}{2})$ und $(x_-, y_-) = -(2, \frac{1}{2})$ 1P.

Also: $\max\{f(x,y) : (x,y) \in H\} = \frac{1}{4} = -\min\{f(x,y) : (x,y) \in H\}$ 1P

(falls nur max oder nur im letzten Schritt richtig bestimmt wurde: nur $\frac{1}{2}$ P statt 1P.)

7. **(8 P.)** Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 1$ für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = xy(x) - x^3.$$

Es gilt allgemein (für $y' = py + q$, $y(x_0) = y_0$)

$$y(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \qquad 1\,P.$$

$$\text{mit } \varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right) \qquad 1\,P.$$

Im hier vorliegenden Fall mit $x_0 = 0$ und $p(x) = x$

$$\text{also } \varphi(x) = \exp\left(\int_0^x t\,dt\right) = e^{x^2/2} \qquad 1\,P.$$

und mit $y_0 = 1$, $q(x) = -x^3$ ergibt sich weiter

$$y(x) = e^{x^2/2}\left(1 - \int_0^x t^3 \cdot e^{-t^2/2}\,dt\right)$$

Subst. $z = t^2/2 \Rightarrow dz = t\,dt$, so dass 1 P.

$$y(x) = e^{x^2/2}\left(1 - \int_0^{x^2/2} 2z e^{-z}\,dz\right)$$

1 P. (für die richtige Ausführung der Subst.)

Mit partieller Integration: $\int z e^{-z}\,dz = -(z+1)e^{-z}$ 2 P.

So dass insgesamt

$$\underline{\underline{y(x)}} = e^{x^2/2}\left(1 + 2\left[(z+1)e^{-z}\right]_0^{x^2/2}\right)$$

$$= e^{x^2/2}\left(1 + (x^2+2)e^{-x^2/2} - 2\right)$$

$$= \underline{\underline{-e^{x^2/2} + x^2 + 2}} \qquad 1\,P.$$