Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2014/15
19.03.2015

Nachklausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)^2$, $y(0) = 1$ besitzt genau eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Das Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)^2$, $y(0) = 0$ besitzt genau eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Sind $y_{1,2} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nichttriviale Lösungen einer Dgl. der Form

   $$y'' + py' + qy = 0$$

   mit $p, q \in \mathbb{R}$ und gilt für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dass $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, so existiert eine reelle Zahl λ, für die $y_1 = \lambda y_2$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion ist symmetrisch.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, und ist $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls kompakt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **Offene und abgeschlossene Mengen (2+6 P.)**

   (a) Geben Sie die Definitionen der Begriffe "offen" und "abgeschlossen" für Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) an.

   (b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der üblichen, d.h. euklidischen Metrik) offen bzw. abgeschlossen sind (Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.):

   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy = 0\}$,

   (ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > n\}$

   (iii) $\{(x, x^3) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 17\}$

3. **(Banachscher Fixpunktsatz, 7 P.)** Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

   $$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x_2^4 + 1}, \qquad x_2 = \frac{1}{30}\cos^2(5x_1 + e)$$

   eine eindeutige Lösung $(x_1^*, x_2^*)^\top \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

4. **(5+4 P.)** Es sei

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

(b) Untersuchen Sie (z.B. anhand der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$), ob $(\mathbb{R}, d)$ mit der oben definierten Metrik d vollständig ist. Formulieren Sie eine Behauptung und begründen Sie diese.

5. **(2+3+2+3+4+2 P.)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 9x - 3y + 24.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie die kritische Stelle (x_c, y_c) von f. (Es gibt nur eine.)

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$.

(d) Untersuchen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$ auf Definitheit.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass f in (x_c, y_c) ein isoliertes globales Minimum annimmt.

(f) Berechnen Sie $\min\{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. **(2+2+1+8 P.)** Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2$.

(a) Begründen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\overline{B_2(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$ und $\Delta f(x, y)$.

(c) Begründen Sie, dass $\max\{f(x, y) : (x, y) \in \overline{B_2(0)}\} = \max\{f(x, y) : (x, y) \in \partial B_2(0)\}$ und ebenso $\min\{f(x, y) : (x, y) \in \overline{B_2(0)}\} = \min\{f(x, y) : (x, y) \in \partial B_2(0)\}$.

(d) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf $\partial B_2(0)$ und berechnen Sie $\max\{f(x, y) : (x, y) \in \overline{B_2(0)}\}$ sowie $\min\{f(x, y) : (x, y) \in \overline{B_2(0)}\}$.

(Hinweis: Die Aufgabenteile (a) und (c) sind im Wesentlichen durch das Zitat passender Sätze aus der Vorlesung zu erledigen.)

7. **(6+6 P.)** Gegeben sei das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem $y' = Py + Q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} 2x & \cos x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} x \\ e^{x^2} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie dasjenige Lösungsfundamentalsystem Y von $y' = Py$, für das $Y(0) = E_2$ gilt. (E_2 bezeichne die 2×2-Einheitsmatrix.)

(b) Berechnen Sie diejenige Lösung y_p des inhomogenen Systems $y' = Py + Q$, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0, 0)^\top$ genügt.

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 37 (von 75 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 30 Punkten. Viel Erfolg!