Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2015/16
21.03.2016

Nachklausur zu Analysis II

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 70 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, so dass für ein $q \in [0, 1)$ gilt
   $$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X,$$
   so besitzt f höchstens einen Fixpunkt.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Für die Menge $G := \{(x, x^5) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3\}$ gilt $\partial G = G$. (Hierbei sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen.)
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Hesse-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, so dass für ein $q \in [0, 1)$ gilt
   $$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X,$$
   so besitzt f genau einen Fixpunkt.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ alle Richtungsableitungen existieren, so ist f in x_0 auch partiell differenzierbar.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(3+4 P.)** Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm an und entscheiden Sie, ob durch die folgenden Ausdrücke eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ definiert wird. Hierbei sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$.

   (a) $\|A\| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^4\Big)^{\frac{1}{4}}$, (b) $\|A\| = |\det A|^{\frac{1}{n}}$, (c) $\|A\| = \bigg(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^3\Big)^{\frac{2}{3}}\bigg)^{\frac{1}{2}}$,

   (d) $\|A\| = \max\big\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A^\top A\big\}$.

   Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3. **(2+4+2+7 P.)** Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

   (i) $\nabla f(x) = x f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, (ii) $f(e_1) = \sqrt{e}$. (Hierbei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$.)

   (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(e_1)$ in Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)^\top$.

   (b) Zeigen Sie: Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt f in $x_0 = 0$ ein isoliertes lokales Extremum.

   (c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $f(0)$, ob es sich bei dem lokalen Extremum aus Teil (b) um ein Maximum bzw. um ein Minimum handelt.

   (d) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt, die den Bedingungen (i) und (ii) genügt, und bestimmen Sie diese.

4. **(11 P.)** Es seien

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < x + y < \frac{3\pi}{2}\}$$

   und

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := \sin(x) \sin(y) \cos(x + y).$$

   Begründen Sie, dass f auf Ω ein Maximum und ein Minimum annimmt und berechnen Sie $\max\{f(x, y) : (x, y) \in \Omega\}$ und $\min\{f(x, y) : (x, y) \in \Omega\}$.

   Hinweise: Die Berechnung von $\operatorname{Hess} f(x, y)$ ist zur Lösung der Aufgabe *nicht* erforderlich. Es ist $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

5. **(9 P.)** Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{3}{2}}$$

   unter der Nebenbedingung $20x + 3y = 32$. Berechnen Sie dabei auch den zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ.

6. **(4+3 P.)** Für $y \in [-1, 1]$ sei $f(y) = -\sqrt{1 - y^2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(y) \qquad y(0) = 1$$

   auf dem Intervall $[0, \pi]$ mehr als eine Lösung besitzt.

   (b) Skizzieren Sie den Graphen von f, und begründen Sie, dass Ihr Ergebnis aus (a) *nicht* im Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf steht.

7. **(6+5 P.)** Gegeben sei das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem $y' = Py + Q$, wobei

$$P(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie dasjenige Lösungsfundamentalsystem Y von $y' = Py$, für das $Y(0) = E_2$ gilt. (E_2 bezeichne die 2×2-Einheitsmatrix.)

   (b) Berechnen Sie diejenige Lösung y_p des inhomogenen Systems $y' = Py + Q$, die der Anfangsbedingung $y_p(0) = (0, 0)^\top$ genügt.