Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

WiSe 2015/16
21.03.2016

Lösung
und
Wertung

Nachklausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Normen)	7 Punkte
A3	15 Punkte
A4 (Extremwertaufgabe)	11 Punkte
A5 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	9 Punkte
A6 (Ein Anfangswertproblem)	7 Punkte
A7 (Inhomogenes System linearer Dgln. 1. Ordnung)	11 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 70 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, so dass für ein $q \in [0, 1)$ gilt

   $$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X,$$

   so besitzt f höchstens einen Fixpunkt.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Für die Menge $G := \{(x, x^5) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3\}$ gilt $\partial G = G$. (Hierbei sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen.)

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Hesse-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, so dass für ein $q \in [0, 1)$ gilt

   $$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X,$$

   so besitzt f genau einen Fixpunkt.

   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ alle Richtungsableitungen existieren, so ist f in x_0 auch partiell differenzierbar.

   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(3+4 P.)** Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm an ...

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ 1P.

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$ 1P

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ 1P

... und entscheiden Sie, ob durch die folgenden Ausdrücke eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$ definiert wird. Hierbei sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

(a) $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^4 \right)^{\frac{1}{4}}$, ja 1P

(b) $\|A\| = |\det A|^{\frac{1}{n}}$, nein 1P.

(c) $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^3 \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$, ja 1P.

(d) $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A^\top A\}$. ja. 1P.

Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3. **(2+4+2+7 P.)** Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:
   (i) $\nabla f(x) = x f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,
   (ii) $f(e_1) = \sqrt{e}$. (Hierbei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\top$.)

   (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(e_1)$ in Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)^\top$.
   (b) Zeigen Sie: Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt f in $x_0 = 0$ ein isoliertes lokales Extremum.
   (c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $f(0)$, ob es sich bei dem lokalen Extremum aus Teil (b) um ein Maximum bzw. um ein Minimum handelt.
   (d) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt, die den Bedingungen (i) und (ii) genügt, und bestimmen Sie diese.

Lös.:

(a) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(e_1) = \langle \xi, \nabla f(e_1) \rangle$ 1P

$\overset{(i)}{=} \langle \xi, e_1 \rangle f(e_1) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{e}$ 1P

(b) Nach (i) gilt $\nabla f(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, also ist $x_0 = 0$ eine kritische Stelle. 1P

Für die Hesse-Matrix haben wir

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \overset{(i)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j f(x)) \overset{(i)}{=} (\delta_{ij} + x_i x_j) f(x)$, 1P.

insbes. $\operatorname{Hess} f(0) = f(0) \cdot E_n$ 1P.

Da $f(0) \neq 0$ vorausgesetzt ist, ist $\operatorname{Hess} f(0)$ definit, da alle EWe $\neq 0$ sind und dasselbe VZ haben. 1P
$\Rightarrow$ Beh.

(c) Ist $f(0) > 0 \Rightarrow \operatorname{Hess} f(0)$ ist positiv definit
$\Rightarrow$ In $x_0 = 0$ liegt ein (isoliertes) lokales Minimum vor. 1P

Ist $f(0) < 0$, so liegt ein (..) Maximum vor 1P.

(d) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_1 \cdot f(x)$ (nach (i))

$$\underset{\substack{x_2,\dots,x_n\\ \text{fest}}}{\Longrightarrow} \quad \int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\, dx_1 = \int x_1\, dx_1 \qquad 1P$$

$$\Longrightarrow \quad \ln |f(x)| = x_1^2/2 + C(x_2,\dots,x_n) \qquad 1P.$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = C_1(x_2,\dots,x_n) \cdot e^{x_1^2/2} \qquad 1P.$$

Weiter folgt

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2}(x_2,\dots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{-x_1^2/2} \cdot f(x) = e^{-x_1^2/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$$

$$= e^{-x_1^2/2} x_2 \cdot f(x) = x_2 \cdot C_1(x_2,\dots,x_n) \qquad 1P$$

$$\underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} \quad C_1(x_2,\dots,x_n) = e^{x_2^2/2} \cdot C_2(x_3,\dots,x_n) \qquad 1P.$$

Wiederholung des Arguments ergibt

$f(x) = C \cdot e^{|x|^2/2}$ mit einer absoluten Konst. C. 1P.

(ii) ergibt: $e^{\frac{1}{2}} = f(e_1) = C \cdot e^{\frac{1}{2}}$, also $C = 1$

und damit $f(x) = e^{|x|^2/2}$ 1P.

4. **(11 P.)** Es seien

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < x+y < \frac{3\pi}{2}\}$$

und

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := \sin(x)\sin(y)\cos(x+y).$$

Begründen Sie, dass f auf Ω ein Maximum und ein Minimum annimmt und berechnen Sie $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \Omega\}$ und $\min\{f(x,y) : (x,y) \in \Omega\}$.

Hinweise: Die Berechnung von Hess$f(x,y)$ ist zur Lösung der Aufgabe *nicht* erforderlich.- Es ist $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Lös.: $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion auf einem Kompaktum, nimmt also ihr Max. und Min. an. 1P

Da $f|_{\partial\Omega} = 0$ und f in Ω sowohl positive als auch negative Werte annimmt, gilt $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \overline{\Omega}\} = \max\{f(x,y) : (x,y) \in \Omega\}$, desgl. für min. (Die Extrema werden also in Ω angenommen. 1P

Berechnung des Gradienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\sin(y)\cos(x+y) - \sin(x)\sin(y)\sin(x+y) \quad 1P$$

$$= \sin(y)\left(\cos(x)\cos(x+y) - \sin(x)\sin(x+y)\right)$$

$$= \sin(y) \cdot \cos(2x+y) \quad 1P.$$

Genauso: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\cos(x+2y)$ 1P.

Da in Ω $\sin(x) = 0$ und $\sin(y) = 0$ ausgeschlossen sind, haben wir

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{array}{l} \cos(2x+y) = 0 \\ \wedge \ \cos(x+2y) = 0 \end{array} \quad 1P.$$

als notwendige Bedingungen für lokale Extrema.

Aufgrund des Def.-Bereiches sind ausgeschlossen

$$2x+y=\frac{\pi}{2} \wedge x+2y=\frac{3\pi}{2} \quad (\Rightarrow y-x=\pi \Rightarrow y=x+\pi \text{ ↯ })$$
$$x+2y=\frac{\pi}{2} \wedge 2x+y=\frac{3\pi}{2} \quad (\Rightarrow x=y+\pi>\pi \text{ ↯ })$$
$$2x+y=\frac{5\pi}{2} \vee x+2y=\frac{5\pi}{2} \quad (\Rightarrow x+y>\frac{3\pi}{2}) \qquad 1P.$$

Es bleiben:

① $$\left.\begin{array}{l} 2x+y=\frac{\pi}{2} \\ x+2y=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \underset{+,-}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 3(x+y)=\pi \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1=y_1=\frac{\pi}{6} \qquad 1P.$$

② $$\left.\begin{array}{l} 2x+y=\frac{3\pi}{2} \\ x+2y=\frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \underset{+,-}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 3(x+y)=3\pi \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2=y_2=\frac{\pi}{2} \qquad 1P.$$

Einsetzen und vergleichen ergibt

$$\max\{f(x,y):(x,y)\in\Omega\}=f(x_1,y_1)=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\underset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{4}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{8} \qquad 1P.$$

sowie

$$\min\{f(x,y):(x,y)\in\Omega\}=f(x_2,y_2)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\pi)$$
$$=-1 \qquad 1P.$$

Aufg 5 (Extrema mit NB): Bestimmen Sie das Maximum (9 P.)

der Funktion

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := x^{5/2} y^{3/2}$$

unter der Nebenbedingung $20x + 3y = 32$. Berechnen Sie dabei auch den Lagrange-Multiplikator λ.

<u>Lös.</u>: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{5}{2} x^{3/2} y^{3/2}, \frac{3}{2} x^{5/2} y^{1/2} \right)$ 2P.

Mit $g(x,y) = 20x + 3y - 32$ lautet die NB also $g(x,y) = 0$ und wir haben

$$\nabla g(x,y) = (20, 3)$$ 1P.

Der Satz über die Lagrange-Multiplikatoren führt auf das GlS.:

$$\frac{5}{2} x^{3/2} y^{3/2} = 20\lambda, \quad \frac{3}{2} x^{5/2} y^{1/2} = 3\lambda$$ 1P.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{5}{40} x^{3/2} y^{3/2} = \lambda = \frac{1}{2} x^{5/2} y^{1/2}$$ 1P.

Da $x = 0$ oder $y = 0$ ausgeschlossen werden kann (dort liegen wegen $f(x,y) = 0$ offensichtlich globale Minimalstellen vor) folgt als notwendige Bed.

$$\Longrightarrow \quad \frac{5}{20} y = x \quad \text{bzw} \quad y = 4x$$ 1P.

Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, Forts. A5:

So erhält man $x_c = 1\,,\; y_c = 4$ 1P.

Damit ergeben sich

$$\max\{f(x,y) : g(x,y)=0\} = f(x_c, y_c) = 4^{3/2} = 8$$ 1P.

und $\lambda = \frac{1}{2}\, x_c^{5/2}\, y_c^{\frac{1}{2}} = 1.$ 1P.

A6: Für $y \in [-1,1]$ sei $f(y) = -\sqrt{1-y^2}$.

4+3 P.

(a) Zeigen Sie, dass das AWP

$$y' = f(y), \qquad y(0) = 1$$

auf dem Intervall $[0,\pi]$ mehr als eine Lösung besitzt.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f und begründen Sie, dass Ihr Ergebnis aus (a) nicht im Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf steht.

Lösung + Wertung:

(a) $y_1(x) = 1$ $(\forall x \in [0,\pi])$ ist eine Lösung des AWP. 1(P.)

Eine weitere Lösung erhalten wir durch "Separation":

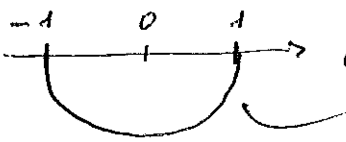
$$y' = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int -dx = C - x$$ 1P.

$$\Rightarrow \arcsin y = C - x \Rightarrow y(x) = \sin(C-x)$$ 1P.

$$y_2(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow y_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$ 1P.

(und tatsächlich $\cos'(x) = -\underbrace{\sin(x)}_{\geq 0 \text{ auf } [0,\pi]} = -\sqrt{1-\cos^2(x)}$, $\cos(0)=1$)

(b) G_f



unterer Halbkreis 1P.

Steht nicht im Widerspruch zu P.-L., da f in $y = 1$, also dort, wo die Anfangsbed. gestellt ist, nicht Lipschitz-stetig ist 2P.

Hier erhält lediglich einen P., wer nur feststellt, f sei nicht Lipschitz, ohne genauer zu sagen, wo

A7 (a) LFS Y von $y' = Py$ mit $Y(0) = E_2$, dabei $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6+5 P.

Das gesuchte LFS ist gegeben durch $Y(x) = e^{xP}$. 1P.

Wir schreiben $P = 2E_2 + P_0$ mit $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so dass

$$e^{xP} = e^{2x} \cdot e^{xP_0}, \text{ (und berechnen)} \qquad 1P$$

$$e^{xP_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} P_0^k \qquad \text{(Für die Kenntnis der Reihe →) } 1P.$$

Wir haben $P_0^2 = -E_2$ und daher

$$e^{xP_0} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (-1)^{\frac{k}{2}} E_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot P_0 \qquad 1P.$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \cdot E_2 + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \cdot P_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

Also: $e^{xP} = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = Y(x)$ 1P.

Bem.: Teile der Rechnung sind aus V und Ü bekannt. Wenn etwas fehlt und es danach richtig weitergeht, gibt es also keinen Punktabzug!

(b) Löse $y' = Py + Q$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

dabei P wie oben und $Q(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$.

Die "Variation der Konstanten" - Formel lautet bei Anfangsbed. $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$y_p(x) = Y(x) \int_0^x (Y(t))^{-1} \cdot Q(t)\, dt \qquad 1P.$$

Hier: $(Y(t))^{-1} = (e^{tP})^{-1} = e^{-tP} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 1P.

$$\rightsquigarrow (Y(t))^{-1} \cdot Q(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1P$$

$$\rightsquigarrow \int_0^x (Y(t))^{-1} Q(t)\, dt = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(e^{-2x} - 1) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

$$\rightsquigarrow y_p(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} e^{-2x} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{2} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \qquad 1P.$$