Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2015/16
24.02.2016

Klausur zu Analysis II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Durch $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Die Menge $G := \{(x, x^5) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3\}$ ist offen. (Hierbei sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen.)

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Jacobi-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

   $$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X \quad \text{mit} \quad x \neq y,$$

   so besitzt f genau einen Fixpunkt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existieren auch alle Richtungsableitungen von f.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(4+5+3 P.)** Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

   $$P(x, y) = (x + 2)^3 - (y - 3)^2 = x^3 + 6x^2 + 12x - y^2 + 6y - 1.$$

   (a) Zeigen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_c, y_c) besitzt, und bestimmen Sie diese.

   (b) Berechnen Sie $\mathrm{Hess}P(x, y)$, und zeigen Sie, dass $\mathrm{Hess}P(x_c, y_c)$ negativ semidefinit ist.

   (c) Untersuchen Sie, ob P in (x_c, y_c) ein lokales Extremum besitzt.

3. **(2+3+4+2 P.)** Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f im Nullpunkt

(a) stetig,

(b) partiell differenzierbar,

(c) total differenzierbar,

(d) stetig partiell differenzierbar

ist. Begründen Sie Ihre Antworten!

4. **(6+6 P.)** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = (e^{x^2-y^2}, e^{2xy})^\top.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und deren Determinante.

(b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv bzw. überall lokal invertierbar ist.

5. **(12 P.)** Gegeben seien der Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und die Ellipse

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{dist}((x_0, y_0), E)$. Bestimmen Sie auch den maximalen Abstand von (x_0, y_0) zu den Punkten der Ellipse, also $\max\{|(x_0, y_0) - (x, y)| : (x, y) \in E\}$.

6. **(5+7 P.)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $\quad y' = \dfrac{3}{x} y + 3x, \qquad y(1) = 2,$

(b) $\quad y' = \dfrac{1+y^2}{y(2x+x^2)}, \qquad y(1) = 1.$

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 69 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!