Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

WiSe 2015/16
24.02.2016

Lösung
+
Wertung

Klausur zu Analysis II

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind zwei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe)	12 Punkte
A3 (Differenzierbarkeitsuntersuchung)	11 Punkte
A4 (Jacobi-Matrix und Satz über inverse Abbildungen)	12 Punkte
A5 (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)	12 Punkte
A6 (Gewöhnliche Differenzialgleichungen)	12 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 69 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Durch $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Die Menge $G := \{(x, x^5) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3\}$ ist offen. (Hierbei sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen.)
   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Jacobi-Matrix einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch.
   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

   $$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X \quad \text{mit} \quad x \neq y,$$

   so besitzt f genau einen Fixpunkt.
   Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existieren auch alle Richtungsableitungen von f.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(4+5+3 P.)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = (x+2)^3 - (y-3)^2 = x^3 + 6x^2 + 12x - y^2 + 6y - 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_c, y_c) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Hess}P(x,y)$, und zeigen Sie, dass $\mathrm{Hess}P(x_c,y_c)$ negativ semidefinit ist.

(c) Untersuchen Sie, ob P in (x_c,y_c) ein lokales Extremum besitzt.

(a) $\nabla P(x,y) = (3x^2 + 12x + 12, \ -2y + 6)$ 2P.

$$\nabla P(x,y) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array},$$

also $(x_c, y_c) = (-2, 3)$. 2P.

(b) $$\mathrm{Hess}\, P(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ 3P.

$$\mathrm{Hess}\, P(x_c, y_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ 1P.

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$ und ist daher negativ semidefinit. 1P.

(c) Beh.: P hat in (x_c, y_c) kein lokales Extremum 1P.

Bew.: Für $\varepsilon \geq 0$ sei $x_{\pm\varepsilon} = -2 \pm \varepsilon = x_c \pm \varepsilon$.

Dann ist $P(x_{\pm\varepsilon}, y_c) = \pm \varepsilon^3$, insbes. $P(x_c, y_c) = 0$.

In jeder Umgebung von (x_c, y_c) werden also sowohl positive wie auch negative Werte angenommen. Hieraus folgt die Beh. 2P.

3. **(2+3+4+2 P.)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f im Nullpunkt

(a) stetig,

(b) partiell differenzierbar,

(c) total differenzierbar,

(d) stetig partiell differenzierbar

ist. Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) f ist in $(0,0)$ stetig, 1P.

denn: $|f(x,y)| \leq |y| \to 0 \quad ((x,y) \to 0)$ 1P.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(f(x,0) - f(0,0)) = 0$ 1P.

1P.

Ebenso: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Also ist f in $(0,0)$ partiell diffbar. 1P.

(c) f ist im Nullpunkt nicht total diffbar. 1P.

Begründung: Annahme doch. Dann gilt nach Def.

$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \binom{x}{y} + \varphi(x,y)$, $\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad ((x,y) \to 0)$ 1P.

Nun ist $f(0,0) = 0$ und (nach (b)) $\nabla f(0,0) = 0$, also

$$\lim_{(x,y) \to 0} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$ 1P.

Wählen wir hierin speziell $x = y$, so ergibt sich

$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = 2^{-3/2}$, Widerspruch. 1P.

(d) f ist in $(0,0)$ nicht stetig partiell diffbar, 1P.

denn dann wäre f auch total d'bar, im Widerspruch zu (c) 1P.

4. **(6+6 P.)** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = (e^{x^2-y^2}, e^{2xy})^\top.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und deren Determinante.

b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv bzw. überall lokal invertierbar ist.

(a)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^{x^2-y^2} & -2y \cdot e^{x^2-y^2} \\ 2y\, e^{2xy} & 2x\, e^{2xy} \end{pmatrix}$$ 4P.

und der Determinante

$\det Df(x,y) = 4(x^2+y^2)\exp(x^2-y^2+2xy).$ 2P.

(b) f ist

- nicht injektiv, da $f(-x,-y) = f(x,y)$ 2P.,
- nicht surjektiv, da $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \subset (0,\infty)^2$ 2P.,
- überall lokal invertierbar, 1P.

dies nach dem Satz über inverse Abbildungen, da $\det Df(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. 1P.

5. **(12 P.)** Gegeben seien der Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und die Ellipse

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{dist}((x_0, y_0); E)$. Bestimmen Sie auch den maximalen Abstand von (x_0, y_0) zu den Punkten der Ellipse, also $\max\{|(x_0, y_0) - (x, y)| : (x, y) \in E\}$.

Wir optimieren die

Zielfunktion: $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, wobei

$$g(x,y) = \frac{x^2}{9} + y^2 - 1 \qquad 1P.$$

Notwendige Bedingung:

$$(0,0) \overset{1P.}{=} \nabla(f - \lambda g)(x,y) = 2\left(\underbrace{x - 1 - \frac{\lambda}{9}x}_{1P.},\ \underbrace{y - \lambda y}_{1P.}\right) \qquad (3P)$$

(Zu lösen ist also das GlS.: $x(1-\frac{\lambda}{9}) = 1$; $(1-\lambda)y = 0$; $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.)

1. Fall: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} 4 & (\text{für } +) \\ 16 & (\text{für } -) \end{cases}$ 2P.

2. Fall: $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x \cdot \frac{8}{9} = 1 \Rightarrow x = \frac{9}{8}$ 1P

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64} \qquad 1P$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 = \frac{56}{64} = \frac{7}{8} \qquad 1P$$

Vergleich der Funktionswerte

$$\min\{f(x,y) : (x,y) \in E\} = \frac{7}{8} \qquad 1P.$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}((x_0,y_0), E) = \sqrt{\frac{7}{8}} \qquad 1P.$$

Ferner: $\max\{|(x,y) - (x_0,y_0)| : (x,y) \in E\} = \sqrt{16} = 4$ 1P.

A6 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \frac{3}{x} y + 3x$; $y(1) = 2$, (5P.)

(b) $y' = \frac{1+y^2}{y(2x+x^2)}$; $y(1) = 1$. (7P.)

Lös.: (a) Als bekannt vorausgesetzt wird die Lösungsformel

$$y(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt\right)$$ 1P.

und $$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$$ 1P.

Hier: $p(x) = \frac{3}{x}$ und daher $\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt = \int_1^x \frac{3}{t}\,dt = 3\cdot \ln(t)\Big|_0^x$

$= 3\cdot\ln(x) = \ln(x^3) \implies \varphi(x) = x^3$ 1P.

sowie: $q(x) = 3x$ und somit $\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_1^x \frac{3t}{t^3}\,dt$

$= 3\int_1^x t^{-2}\,dt = -3\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 3 - \frac{3}{x}$ 1P.

Insgesamt also: $y(x) = x^3\left(2 + 3 - \frac{3}{x}\right) = 5x^3 - 3x^2$. 1P

Alternativ: Der Ansatz $\varphi(x) = c\cdot x^k$ führt beim Einsetzen in die homogene Gleichung auf $k = 3$ (c beliebig). 2P.

Ebenso: Setzt man $y_p(x) = c x^k$, so muß $k = 2$ und $c = -3$ sein, also $y_p(x) = -3x^2$. 2P.

Richtig zusammensetzen, so dass $y(1) = 2$ erfüllt ist: 1P.

Lös. A6, Teil (b)

Dgl. $\Longrightarrow \int \frac{y(x)\,y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx = \int \frac{dx}{2x+x^2}$ $(+C)$ 1P.

Nun ist $\int \frac{y(x)\,y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\,dy$ 1P.

für $\varphi(y) = 1+y^2$.

Die Subst.-Regel ergibt $\ldots = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$ $(+C)$ 1P.

Andererseits: $\frac{1}{2x+x^2} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$ 1P.

$\leadsto \int \frac{dx}{2x+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$ $(+C)$ 1P.

(Betragsstriche sind ok, aber im Hinblick auf die AB nicht erforderlich!)

Es folgt: $\ln(1+y^2) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + C$ und damit

$1+y^2 = C\cdot\frac{x}{x+2}$ mit einem $C>0$ 1P

$y(1)=1$ ergibt $2 = \frac{C}{3}$, also $C=6$ und schließlich

$$\underline{y(x) = \sqrt{\frac{6x}{x+2} - 1}}$$ 1P.