Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
23.10.2015
Blatt 1

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

Empfehlung: Stellen Sie zu Ihrem eigenen Gebrauch eine Tabelle mit 15 bis 20 Funktionen und zugehörigen Stammfunktionen zusammen, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind. Diese Tabelle sollte auch - als Stammfunktionen - die Umkehrfunktionen der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen umfassen.

1. Die folgenden Ausdrücke haben exakt die Gestalt $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Geben Sie die zugehörigen Stammfunktionen an.

(a) $\dfrac{2x}{1+x^4}$

(b) $\dfrac{\tan^k(x)}{\cos^2(x)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

(c) $\dfrac{1}{x \ln x}$

(d) $\cot x$

(e) $x^x(1 + \ln x)$.

Hinweis: In Teil (b) ist der Fall $k = -1$ gesondert zu behandeln. Durch die Bearbeitung von Teil (e) kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch (ggf. mehrfache) partielle Integration:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$

(b) $\displaystyle\int x^a \ln(x) dx$

(c) $\displaystyle\int \exp(ax) \sin(x) dx$

(d) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$

Hierbei ist a ein reeller Parameter.

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale durch geeignete Umformungen der Integranden:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\cos(x)}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$

Hinweis: In Teil (b) führt eine Partialbruchzerlegung zum Ziel, vgl. hierzu: Kaballo, Einführung in die Analysis I, Abschnitt 28.

4. Leiten Sie Rekursionsformeln der Gestalt

$$a_n I_{n+2}(x) = f_n(x) + b_n I_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für die folgenden unbestimmten Integrale her:

(a) $I_n(x) = \displaystyle\int (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx \qquad (|x| < 1)$

(b) $I_n(x) = \displaystyle\int \tan^n(x) dx \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

Geben Sie auch Stammfunktionen für spezielle Werte von n an, die es im Prinzip erlauben, mit Hilfe der Rekursionsformel $I_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu berechnen.

Hinweis: In Teil (a) führt partielle Integration zum Ziel, für Teil (b) beachte man $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und verwende die Substitutionsregel.

Abgabe: Fr., 30.10.2015, bis 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 04.11.2015 und Do., 05.11.2015