

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

5. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int_0^1 \ln x \, dx,$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

(c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2},$

(d) $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx.$

Machen Sie dabei in geeigneter Weise kenntlich, welches die problematischen Integralgrenzen sind!

6. Untersuchen Sie, ob die nachstehenden uneigentlichen Integrale existieren:

(a) $\int_{-\infty}^\infty \sin x \, dx,$

(b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx,$

(c) $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx,$

(d) $\int_0^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

7. Zeigen Sie, dass das (ggf. uneigentliche) Integral

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

(a) für alle positiven reellen Zahlen x und y konvergiert und

(b) divergiert, falls $x \leq 0$ oder $y \leq 0$.

Die Abbildung $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$ heißt *Eulersche Beta-Funktion*.

8. Zeigen Sie für die in Aufgabe 7 definierte Beta-Funktion:

(a) $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y > 0$ und

(b) für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $B(x, n) = \frac{(n-1)!}{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$.

Abgabe: Fr., 06.11.2015, bis 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 11.11.2015 und Do., 12.11.2015