Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
06.11.2015
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

9. Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert werden.

10. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $p \in [1, \infty)$ sei

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweisen Sie für $p \leq q$ die Ungleichungen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

11. Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

12. Bestimmen Sie ∂M, $\overline{M}$ und M° für die Teilmenge

$$M := \left\{ (x, \cos \frac{1}{x}) : 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$, der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

Abgabe: Fr., 13.11.2015, bis 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 18.11.2015 und Do., 19.11.2015