Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
13.11.2015
Blatt 4

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

13. (Lindelöf'scher Überdeckungssatz) Zeigen Sie: Jede nichtleere offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung offener Intervalle.
Hinweis: Um dies einzusehen, können Sie möglichst große Intervalle um die rationalen Elemente von U vereinigen.

14. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

(a)
$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+|x|^2}\,,$$

hierbei sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $|x| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ausgestattet;

(b)
$$i\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto i(x) := \frac{x}{|x|^2}\,,$$

dabei $\mathbb{R}^n$ und $|\quad|$ wie in (a).

15. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\varnothing \neq A \subset X$. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A wird definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ genau dann, wenn $x \in (A^c)^\circ$.

(b) Die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A)\colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

16. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition: Ist f gleichmäßig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen in (X, d_X) auf Cauchy-Folgen in (Y, d_Y) ab.

(b) Gilt die in (a) genannte Folgerung stets auch dann, wenn f lediglich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist?

Abgabe: Fr., 20.11.2015, bis 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 25.11.2015 und Do., 26.11.2015