

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

21. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x), & y_1(0) &= 1, \\y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x), & y_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

22. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und 2π -periodisch, so dass für $x \in [-\pi, \pi]$ gilt $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$.

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(b) Verifizieren Sie die Darstellung

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

23. Ausgehend vom Ergebnis in Teil (b) der Aufgabe 22

(a) berechne man die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$$

(b) leite für $0 \leq x \leq \pi$ durch gliedweise Integration (weshalb ist dies zulässig?) die Darstellungen

$$\frac{x}{2}(\pi - x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4} \quad \text{her und}$$

(c) berechne die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Bitte wenden!

24. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stetig. Für die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$ von f gelte $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k \widehat{f}(k)| < \infty$. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Abgabe: Fr., 04.12.2015, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 09.12.2015 und Do., 10.12.2015