Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2015/2016
04.12.2015
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

25. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist definiert durch:

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf \{\operatorname{dist}(x, A) : x \in K\} = \inf \{d(x, y) : x \in K, y \in A\},$$ vgl. Aufgabe 15.

Zeigen Sie:

(a) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \varnothing$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

(b) Die Aussage in Teil (a) wird im Allgemeinen falsch, wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird.

26. Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

27. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz* von F. Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\operatorname{div}(\phi \mathrm{F}) = \langle \operatorname{grad} \phi, \mathrm{F} \rangle + \phi \operatorname{div} \mathrm{F}.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x \qquad \text{(hierbei sei } k \in \mathbb{R} \text{ fest).}$$

28. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \neq \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0).$$

(b) Ist f im Nullpunkt stetig?

Abgabe: Fr., 11.12.2015, 10:25 Uhr

Besprechung: Mi., 16.12.2015 und Do., 17.12.2015